Maria Paula Duarte Silva Cardoso Pinto Passanha

Licenciatura em Engenharia Mecânica

Relatório de Estágio

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre
em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Orientador: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, FCT/UNL
Co-orientadora: Maria de Lourdes Ventura Fernandes, ESFLG

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes Almeida Santos
Arguente: Prof. Doutor Filipe José Gonçalves Pereira Marques
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Vogal: Prof. Maria de Lourdes Ventura Fernandes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho 2012

Relatório de Estágio

À minha família e amigos

Agradecimentos

A todos agradeço o apoio que me prestaram, em especial:

À Professora Doutora Maria Helena Santos e ao Professor Doutor Filipe José Marques, responsáveis científicos do estágio profissional, pelos comentários científicos pertinentes e sugestões enriquecedoras à prática de lecionação.

Ao Professor Doutor António Domingos, orientador do trabalho de investigação, por toda a atenção e disponibilidade dispensadas durante os anos em que frequentei o mestrado, pela orientação científica e metodológica, pelos comentários e sugestões à execução da investigação.

Ao Professor Doutor José Manuel Matos, orientador do trabalho de investigação, pelas indicações bibliográficas e diretrizes apontadas.

À Professora Lourdes Ventura, orientadora do estágio pedagógico, pela disponibilidade, empenho, compreensão, ensinamentos e, muito em particular, por toda a amizade e encorajamento.

Aos alunos das turmas que me receberam e me reconheceram, em especial os alunos da turma do 11ºA com que mais trabalhei e aos que comigo colaboraram no trabalho de investigação.

À Escola pela forma acolhedora com que me integrou e me deu a possibilidade de realizar o estágio pedagógico.

Aos meus filhos que me obrigam a levar a vida para a frente e me mostram a forma como vivê-la intensamente e com alegria.

Aos meus pais que me apoiam em todas as minhas causas e estão sempre ao meu lado para me ajudar e fortalecer.

A todos os meus amigos e família que estiveram sempre presentes em todas as minhas situações para me acompanhar e encorajar.

Resumo

O presente relatório pretende narrar todas as atividades desenvolvidas no estágio pedagógico de Maria Paula Passanha, integrado no Mestrado em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e realizado na Escola Secundária Fernando Lopes-Graça, no ano letivo 2011/2012. Este trabalho resulta da compilação de dois documentos distintos: Parte I - Relatório de Atividades e Parte II – Relatório de Investigação.

O Relatório de Atividades detalha todas as atividades desenvolvidas no decorrer do estágio, relacionadas com a prática pedagógica e no seio da comunidade escolar.

O Relatório de Investigação pretende analisar as questões relacionadas com o conceito de função, as representações que os alunos privilegiam e os processos envolvidos na sua tradução, resultado de uma investigação levada a cabo na turma de estágio, em especial junto de quatro alunos com perfis distintos, segundo uma metodologia de natureza qualitativa e uma recolha de dados baseada nas observação, nas entrevistas e nos documentos.

Este estudo sugere que o conceito que os alunos têm de função está intimamente ligado às imagens que eles lhe associam, uma vez que a definição formal introduzida no Ensino Básico foi dispensada. As representações privilegiadas são neste estádio apenas duas, a gráfica e algébrica, e os procedimentos e a facilidade com que os alunos efetuam a tradução entre ambas decorrem da etapa de aprendizagem em que se encontram. O recurso ao conceito definição de função, confrontado com as imagens apercebidas, prevê-se como um passo importante na tentativa de passar para uma etapa de nível superior.

Termos chave: Estágio pedagógico, função, conceito, representação, tradução

Abstract

This present work aims to describe all the activities developed in the teaching practice of Maria Paula Passanha integrated into the Masters in Teaching Mathematics, Faculty of Science and Technology, New University of Lisbon held at Fernando Lopes Graça, in academic year 2011 / 2012. This work is a compilation of two separate documents: Part I - Practice Report and Part II - Research Work.

The Practice Report details all the activities performed during the practice, related to teaching and within the school community.

The Research Work aims to discuss matters related to the concept of function, the representations that students prefer and processes involved in the translation, being the research carried out in the practice class, in particular with four students with different profiles , according to a qualitative methodology and data collection based on observation, interviews and documents.

This study suggests that the function concept that the students have is closely related to the images that they associate to it, since formal definition introduced in early years was dismissed. The preferred representations are in this stage only two, the algebraic one and the graphical one, being the procedures used and the easiness held in the translation between them connected to the learning level where students find themselves. To apply the definition concept of function and confront it with the perceived images, is foreseen as an important step in the attempt to move on to a higher level.

Keywords: Teaching practice, function, concept, representation, translation

Não consigo conceber ser professor sem estar em constante adaptação.
Se eu desse esta aula amanhã, já não seria com certeza como a que dei hoje.

Índice Geral

Índice de Matérias

Índice de Figuras

Parte I

Parte II

Índice de Tabelas

Parte I

Relatório de Atividades

Introdução

O presente Relatório de Atividades pretende descrever as atividades desenvolvidas no Estágio Pedagógico por Maria Paula Passanha, integrado no Mestrado em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa que decorreu de Setembro de 2011 a Junho de 2012, na Escola Secundária Fernando Lopes-Graça, na Parede, sob a orientação pedagógica da Professora Lourdes Ventura e supervisão científica dos professores da FCT-UNL, Professora Doutora Maria Helena Santos e Professor Doutor Filipe José Marques. A intervenção na prática pedagógica decorreu no 11.º ano do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, na disciplina de Matemática A.

O Estágio Pedagógico representa a formação prática no percurso de aprendizagem de quem quer vir a ser professor e deve ser entendido como uma iniciação à atividade profissional, na qual o estagiário se vai confrontar com a dinâmica em sala de aula, as questões da aprendizagem, a construção do conhecimento e vai poder observar, colaborar, intervir, analisar e refletir sobre situações educativas reais.

O presente documento está organizado em três capítulos que narram todas as atividades desenvolvidas no âmbito do Estágio Pedagógico.

O capítulo um pretende caracterizar todos os intervenientes no Estágio Pedagógico, tais como a Escola, o núcleo de estágio e as turmas de lecionação, os conteúdos da disciplina de Matemática A, o início do estágio e seu horário.

O capítulo dois apresenta uma reflexão sobre toda a aprendizagem realizada com a Orientadora Pedagógica e com a própria prática pedagógica enquanto estagiária.

No capítulo três são descritas uma série de atividades realizadas fora das horas letivas, nomeadamente, trabalho de Direção de Turma, tarefas no âmbito do Projeto de Atividades Educativas, aulas de apoio a aluno com necessidades educativas especiais (NEE), tarefas utilizando a plataforma Inovar, atividades propostas no Plano Anual de Atividades e apoio aos alunos no contexto do jogo Quest4K. São ainda relatadas participações em visitas de estudo promovidas pelas disciplinas de Filosofia e de Biologia e Geologia, em palestras, sessões de esclarecimentos e convívios.

Faz parte integrante deste relatório o *dossier* de estágio, onde se inclui uma cópia dos documentos produzidos durante o estágio: planificação de aulas; fichas de trabalho e respetiva resolução; fichas informativas, fichas de revisão, exercícios para fichas de avaliação sumativa, resolução de fichas de avaliação sumativa, fichas de atividades do plano de atividades, mapas resumo de avaliações, mapas resumo das resoluções de testes de avaliação sumativa, mapas resumos das resoluções em trabalhos de casa, mapas de faltas e outros.

Capítulo 1. Caracterização

O presente capítulo pretende caracterizar todos os intervenientes no Estágio Pedagógico, tais como a Escola, o núcleo de estágio e as turmas de lecionação, os conteúdos da disciplina de Matemática A, o início do estágio e seu horário.

1.1. A Escola

A Escola Secundária Fernando Lopes Graça, inicialmente designada de Escola Secundária da Parede, foi criada em 1981 e pertence à área de influência da Direção Regional de Educação de Lisboa e Vale do Tejo (DRELVT). Situa-se no extremo sudeste da Freguesia da Parede, concelho de Cascais e integra alunos residentes, designadamente, nas freguesias de Parede e S. Domingos de Rana além da freguesia de Carcavelos e, de forma menos significativa, de outras freguesias mais distantes.

Fernando Lopes Graça foi um compositor português do século XX, viveu na Parede de 1960 a 1994, período em que compôs uma importante parte da sua obra, legada à Câmara Municipal de Cascais. Enquanto professor, em diversas Academias de Música, destacou-se pela sua ação pedagógica norteada por uma defesa constante da liberdade e da democracia. Ao adoptar como patrono Fernando Lopes Graça, a Escola assume, de uma forma clara e inequívoca, a sua ação pedagógica orientada para a educação global dos jovens de acordo com os princípios definidos na Carta Internacional dos Direitos Humanos.

No ano letivo de 2011/2012, a Escola foi frequentada por 1355 alunos, distribuídos pelo ensino diurno (981 alunos) e ensino noturno (374 alunos). Fazem parte do ensino diurno, o ensino básico (regular e os cursos de educação e formação - nível 2, tipos 2 e 3) e o ensino secundário (cursos científico-humanísticos e cursos profissionais). Fazem parte do ensino noturno, o ensino básico (curso de Educação e Formação de Adultos) e o ensino secundário (ensino recorrente e curso de Educação e Formação de Adultos).

O corpo docente é composto por 154 professores, com 107 pertencentes ao quadro de nomeação definitiva da escola. Prestam ainda serviço na escola, para além de duas técnicas superiores, com funções na área dos Serviços de Psicologia e Orientação e de uma professora, com função no Ensino Especial, 11 funcionários administrativos e 29 elementos do pessoal auxiliar e operário.

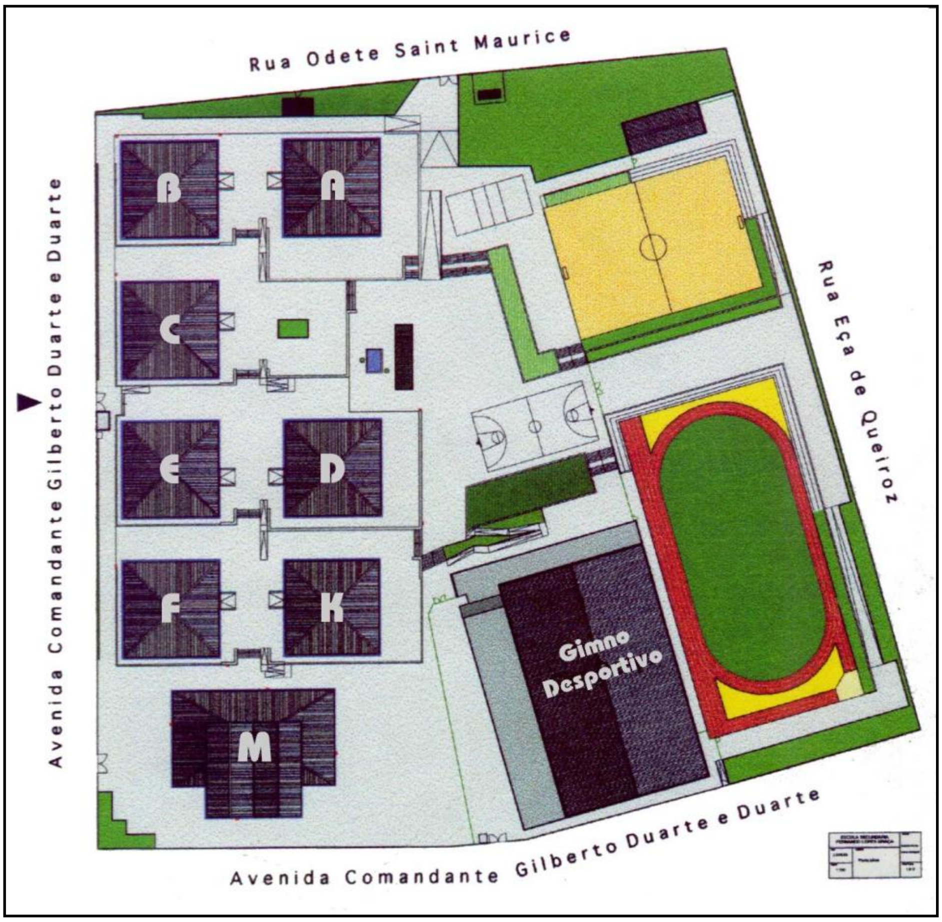


Figura 1 - Planta da Escola

A escola ocupa uma área de 27620 m^2 e inclui 10 edifícios (pavilhões A, B, C, D, E, F, K, M e 2 Gimnodesportivos). No Pavilhão C funcionam os Serviços Administrativos, a Direção Executiva, a Sala de Diretores de Turma e de Atendimento aos Encarregados de Educação, Gabinete dos Serviços de Psicologia e Orientação, Sala de Educação Especial, Salas de Reuniões, Gabinetes das Chefes dos Serviços de Administração Escolar e Assistentes Operacionais, Serviços de Ação Social Escolar (SASE), Serviços de Reprografia e Papelaria, PBX, Gabinete de Trabalho e a Sala de Professores. Nos restantes pavilhões existem ainda os seguintes espaços: 34 salas de aula, 4 salas de desenho, uma sala de Educação Tecnológica, 7 salas de Informática, 12 salas de Grupo, sala de Audiovisuais, um laboratório de Matemática, dois laboratórios de Física, dois laboratórios de Química, dois laboratórios de Biologia, duas oficinas, um Centro de Recursos (M), um auditório (M), um refeitório, dois bares, um Gabinete de Gestão de Conflitos, um Gabinete Médico, sala de convívio, sala de funcionários, sala de manutenção, Associação de Estudantes e portaria.

A Escola encontra-se bem apetrechada a nível de equipamento de audiovisuais e informático. Na sua maioria, as salas possuem projetor e quadro interativo.

Da leitura do seu Projeto Educativo ressaltam os seguintes pontos fortes: estabilidade e experiência profissional do corpo docente, atuação dos Diretores de Turma e dos Serviços de Psicologia e Orientação, acolhimento dos novos alunos e professores, diversidade da oferta formativa para os alunos e qualidade das instalações. Como pontos fracos, referem-se os seguintes: absentismo de alguns docentes e funcionários, dificuldade em conciliar horários e insuficiente trabalho cooperativo dos docentes, mau funcionamento das atividades educativas de substituição, dificuldades de comunicação entre as diferentes estruturas da escola, insucesso escolar, absentismo dos alunos, problemas de indisciplina e de desrespeito pelas regras, deficiente manutenção e algum material danificado e como condicionantes externas, extensão dos programas e elevado número de alunos por turma.

Numa visão muito pessoal parece tratar-se de uma Escola tranquila, com um ambiente acolhedor, na qual, regra geral, existe bom relacionamento entre professores, funcionários e alunos. Todos têm uma identidade e trocam-se histórias de vida e experiências. Existe uma boa abertura da Direção Executiva.

A Escola move-se em função do melhor interesse dos percursos académicos e da aprendizagem comportamental dos alunos. Os alunos são acompanhados, acarinhados, incentivados a progredir e a fazer melhor, assistidos nas suas dificuldades. Os professores e os funcionários zelam pela sua educação muito para além da aprendizagem das disciplinas do currículo. Ouvem-se professores que reinventam formas para melhorar a aprendizagem dos alunos. No grupo de Matemática trocam-se experiências, realiza-se por vezes algum trabalho conjunto. Nas turmas que a professora estagiária acompanhou é comum os professores partilharem informações sobre os alunos, discutirem estratégias.

1.2. O Núcleo de Estágio

O núcleo de estágio, inicialmente composto por três pessoas, Orientadora Pedagógica e duas estagiárias, passou, a partir de fevereiro 2012, a ser composto por duas pessoas, por desistência da outra estagiária.

Tendo a Orientadora Pedagógica duas turmas de 11º ano, A e B, cada uma das estagiárias ficou encarregue de acompanhar preponderantemente uma das turmas, tendo-me calhado a turma do 11º A. Sendo a Direção de Turma A assegurada pela Orientadora Pedagógica, fiquei com a responsabilidade de a acompanhar nesta tarefa.

Por seu lado, a outra estagiária ficou comprometida com o Projeto de Atividades Educativas. Porém, a partir de certa altura passei também a acompanhar este processo.

O trabalho conjunto do núcleo composto pela Orientadora Pedagógica e pelas duas estagiárias ocorria apenas à 4ª feira das 12h00 às 14h00.

O meu trabalho com a Orientadora Pedagógica decorria diariamente dentro e fora da sala de aula, dentro e fora da Escola e pautou-se por um clima de franca cooperação, sintonia, com uma participação e um diálogo permanentes, uma partilha diária de experiências pessoais e profissionais.

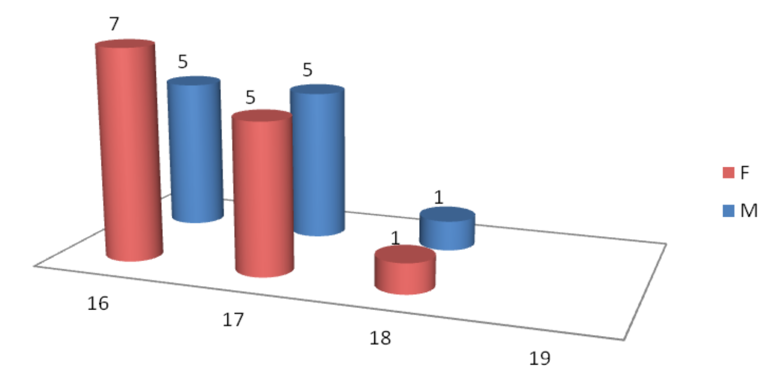
A Orientadora Pedagógica possui uma licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, um mestrado em Educação e Desenvolvimento da Universidade Nova de Lisboa e uma experiência no ensino de mais de 29 anos.

É uma profissional que vive para ensinar, não só os seus alunos, como também os seus estagiários. Não há palavras para descrever a disponibilidade que me dedicou e amizade com que me presenteou.

1.3. A Turma A

A turma do 11º A contava com vinte e quatro alunos, treze raparigas e onze rapazes, com idades compreendidas entre os 16 e os 18 anos (Figura 2).

Figura 2 - Turma 11ºA - Idade dos alunos



A idade dos pais dos alunos ronda maioritariamente os 46-50 anos, sendo que muitos deles foram pais pela primeira vez por volta dos 30 anos.

A maioria dos alunos tem nacionalidade portuguesa, havendo uma aluna brasileira e outra aluna francesa. A maioria dos pais tem nacionalidade portuguesa.

Quinze alunos coabitam com os pais (pai e mãe), seis alunos apenas com a mãe, três alunos com a mãe e com o padrasto e uma aluna com o pai e os avós. A maioria dos alunos tem apenas um irmão (onze alunos) ou não tem irmãos (oito alunos).

No que diz respeito às habilitações literárias dos pais, a Tabela 1 resume a situação. De sublinhar que alguns dos alunos não responderam a esta questão e os alunos que referiram coabitar apenas com a mãe não indicaram as habilitações literárias do pai.

Tabela 1 – Turma 11ºA - Habilitações Literárias		
	mãe	**pai**
Superior	11	5
Secundário	5	2
Básico (3º ciclo)		1
Básico (2º ciclo)		
Básico (1º ciclo)	2	1

Todos os alunos indicaram o Português como língua falada em casa.

Todos os alunos desta turma afirmaram possuir computador e ter acesso à internet em casa.

Dezoito dos vinte e quatro alunos mencionaram não ter qualquer tipo de problema de saúde. Seis alunos referiram problemas de saúde: três alunos com problemas visuais, um aluno com problemas auditivos, um aluno com síndrome nefrótico e um aluno com anemia.

Na sua maioria estes alunos deslocam-se a pé e, por vezes, em carro particular, sendo que, por vezes, se vão de carro para a escola, regressam a pé para casa. Apenas um aluno referiu fazer alguma destas deslocações de comboio e dois alunos utilizam bicicleta. Apenas um aluno demora mais de 30 minutos na sua deslocação casa/escola. A Tabela 2 resume esta descrição.

Tabela 2 – Turma 11ºA - Deslocação casa - escola						
Deslocação para a escola				Tempo gasto na deslocação		
A pé (1) (2)	Motorizada /Bicicleta (3)	Carro	Comboio	5 a 15 min.	15 a 30 min.	+ de 30 min.
16	2	5	1	20	3	1
(1) 5 alunos por vezes fazem o trajeto de carro						
(2) 1 aluno regressa de carro						
(3) 1 aluno por vezes faz o trajeto de carro						

Vinte e um alunos desta turma afirmaram nunca terem repetido um ano. Três alunos repetiram um dos anos, dois dos quais no presente ano letivo encontravam-se a repetir o 11º ano.

Cinquenta por cento dos alunos disse não frequentar o Centro de Recursos da Escola, oito alunos frequentam-no raras vezes e quatro mencionaram recorrer regularmente a este espaço.

Apenas um aluno disse estudar num centro de estudos. Todos os outros estudam em casa, no quarto ou na sala. De um modo geral, os alunos desta turma preferem estudar sozinhos (dezoito alunos); três gostam de estudar em grupo e três preferem estudar com apoio de outras pessoas.

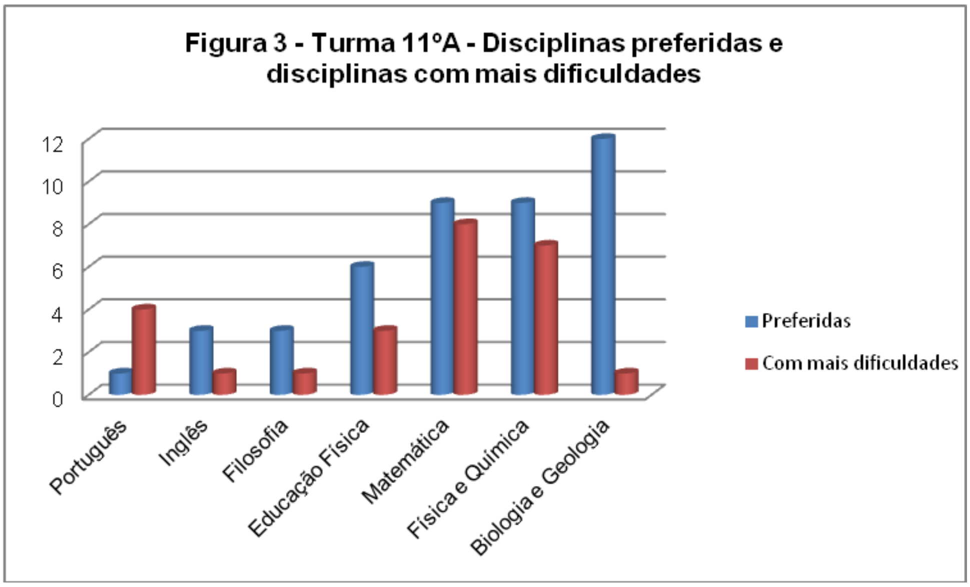
Em relação ao interesse dos pais pela vida escolar dos seus educandos, a Tabela 3 resume a situação:

Tabela 3 – Turma 11ºA - Acompanhamento da vida escolar

	Nunca	Poucas vezes	Algumas vezes	Muitas vezes
Conversar sobre a vida escolar	------	1	8	15
Ver as fichas de trabalho/avaliação	-------	4	11	9
Ajudar a estudar, nos trabalhos de casa	6	6	11	1
Contactar o Diretor de Turma	4	9	8	3

Catorze alunos referiram ter alguém que os ajuda no estudo (pai, mãe, tios, irmãos, avós e explicadores).

Quanto às disciplinas preferidas e às disciplinas em que têm mais dificuldades, os alunos indicaram as que se encontram listadas na Figura 3.



Questionados sobre o que menos gostam da escola, os alunos referiram o refeitório, os repuxos, as casas de banho, o lago, a pouca higiene, as filas e o pavilhão novo de Educação Física.

A Tabela 4 resume as preferências dos alunos na ocupação dos seus tempos livres.

Tabela 4 – Turma 11ºA - Preferência de ocupação dos tempos livres			
1º	Estar com os amigos	7º	Navegar na NET
2º	Ouvir música	8º	Ler
3º	Ver televisão	9º	Jogar no computador
4º	Praticar desporto	10º	Ajudar os pais
5º	Passear	11º	Ir à discoteca
6º	Ir ao cinema	12º	Estar só

A maioria dos alunos gostaria de tirar um curso superior (dezanove alunos); um aluno quer fazer um mestrado; dois alunos pretendem apenas terminar o 12º Ano e dois alunos afirmaram não saber. Cinco destes alunos gostariam de ser Médicos, uma Fisioterapeuta, uma Analista, quatro Engenheiros, três Biólogos e um Treinador de Futebol. Seis alunos disseram não saber ainda qual a profissão pretendida.

Na disciplina de Matemática, três alunas que não se encontravam inscritas, frequentavam as aulas regularmente. Duas delas diminuíram a sua presença no 2º período e deixaram de aparecer no 3ºperíodo.

Em termos de capacidades e aproveitamento é uma turma heterogénea, mas cuja média das classificações nos 1º, 2º e 3º períodos do presente ano letivo foi boa, com a maioria dos alunos com níveis positivos, como se pode observar na Tabela 5.

Tabela 5 – Turma 11ºA - Classificação média dos alunos									
		Português	**Inglês**	**Filosofia**	**Educação Física**	**Matemática**	**Física e Química**	**Biologia Geologia**	**Global**
1º Período	**Classificação**	12,5	14	14,6	15,2	12,2	12,6	13,9	13,5
	Nº inscritos	24	23	23	23	21	24	24	
2º Período	**Classificação**	12,3	15,1	14,2	15,6	13,3	12,6	13,8	13,3
	Nº inscritos	24	22	23	22	21	24	24	
3º Período	**Classificação**	12,9	15,4	15,1	15,7	13,3	13,2	13,8	14,2
	Nº inscritos	24	22	22	22	21	21	24	

O número de alunos com três ou mais negativas foi, respectivamente, de quatro e três e uma nos 1º, 2º e 3º períodos, enquanto o número de alunos que integrou o quadro de excelência foi de quatro, cinco e cinco, em iguais períodos. No Ensino Secundário, o quadro excelência é para os alunos que obtenham média igual ou superior a 17 valores e que apresentem o plano curricular completo.

Foram selecionados sete alunos, todos desta turma, para participar na 2ª Eliminatória das Olimpíadas Nacionais de Biologia a 17 de abril de 2012.

Não houve disciplinas com insucesso superior a 50% e as disciplinas com maior % de negativas foram a Física e Química A, com 17%, 29% e 19%, respectivamente nos 1º, 2º e 3º períodos, e a Matemática A com 33%, 24 % e 24% em iguais períodos. Três alunos anularam a matrícula a Física e Química.

Era uma turma com comportamento satisfatório e uma irrequietude latente, o que, frequentemente, prejudicava o bom funcionamento da aula, parecendo consequência de alguma imaturidade. Este facto era pouco compreensível neste nível etário, em especial depois de todo trabalho realizado pelo Conselho de Turma desde o ano letivo anterior. Pontualmente, verificavam-se algumas atitudes individuais pouco corretas, que a Orientadora Pedagógica rapidamente conseguia fazer regressar a situações adequadas. Os alunos sentavam-se em lugares marcados na sala de aula, segundo uma distribuição feita no início do ano letivo, assistindo-se pontualmente à troca de lugares.

O ritmo de trabalho, a concentração e o empenho eram bastante irregulares, com alguns alunos que realizavam bastante trabalho autónomo dentro e fora de aula, contando-se neste grupo os alunos do quadro de excelência, enquanto outros até tinham dificuldade para abrir o caderno. Em sala de aula, os alunos pareciam compreender os conceitos no momento, mas a falta generalizada de trabalho autónomo em casa não lhes permitia a consolidação, nem sequer perceber onde tinham dúvidas.

Os períodos letivos eram iniciados com grande energia e aparente grande vontade de vingar, de melhorar. Depois essa vontade ia-se diluindo e o comportamento tornava-se algo aleatório.

Na disciplina de Matemática, havia alunos que demonstravam capacidades que não estavam a ser rentabilizadas e que poderiam melhorar consideravelmente com trabalho continuado dentro de aula e fora de aula. Alguns alunos relembravam com relativa facilidade conteúdos adquiridos nos anos anteriores. Alguns alunos não demonstravam grande vontade em raciocinar, preferindo obter receitas que lhes facilitassem a resolução. Apesar do esforço que foi efetuado pela Orientadora Pedagógica e pela estagiária no sentido de contrariar esta predisposição, essas receitas eram muitas vezes obtidas nos apoios externos à Escola. Frequentemente dava a sensação que os alunos apenas queriam apreender os conteúdos com o único objetivo de obter uma classificação e não de incrementar conhecimento.

De modo a contrariar esta tendência, o Conselho de Turma, juntamente com a Diretora de Turma tem tentado continuamente ao longo destes dois anos letivos induzir nos alunos uma maior consciência da necessidade de trabalho e de concentração mais efetivos no seu dia-a-dia por forma a rentabilizarem as suas capacidades e competências e aumentar o seu saber.

A nível da exposição e discussão em grande grupo era uma turma bastante participativa, que imprimia e obrigava a uma dinâmica constante. Porém, se havia alguns que participavam de forma espontânea, outros, pelo contrário, só se envolviam dificilmente e apenas quando solicitados, muitos destes alunos do quadro de excelência. Seria interessante assistir a um maior contributo destes.

Os alunos queixam-se constantemente do que consideravam ser muito trabalho e as tarefas para realizar em casa, que poderiam funcionar como uma ajuda para orientação na consolidação dos conhecimentos, eram mal recebidos pela maioria.

Verificava-se, nalguns casos, a necessidade de franca melhoria de organização de tempos, cadernos,… A falta de tempo apresentava-se como justificação sistemática pelo atraso na realização das tarefas, quer em sala de aula quer fora dela. Por outro lado, os cadernos muitas vezes não existiam, quando existiam por vezes não vinham para a sala de aula ou não eram retirados dos sacos, as fichas desapareciam, os manuais eram pouco utilizados e as calculadoras também.

Cerca de um terço dos alunos recorria a apoio externo (explicadores) na disciplina de Matemática, alguns não para tirar dúvidas mas sim para ouvir de novo ou fazer aquilo que não tinham feito na aula. Este apoio por vezes acarretava alguns problemas em especial por falta de consonância com as reais necessidades dos alunos. Nesse sentido, a Orientadora Pedagógica sugeria por vezes algumas indicações no sentido dos alunos trabalharem nesses apoios em áreas em que se encontravam mais deficitários. Quanto às salas de estudo que a escola disponibiliza havia uma afluência razoável na disciplina de Matemática, mas muito pouco assídua na de Física e Química. Na disciplina de Português havia ainda um apoio para alunos propostos que revelavam dificuldades nas técnicas de expressão escrita e na gramática, mas a maioria desses alunos não o frequentava.

Em termos desportivos, a turma obteve bons resultados a nível escolar, em particular, nas modalidades de *badmington* e de voleibol.

A comunicação entre a Diretora de Turma e os Encarregados de Educação era profícua, respondendo os últimos, de modo geral, prontamente aos telefonemas, *e-mails* e convocatórias presenciais da Diretora de Turma.

1.4. A Turma B

A turma B é composta por vinte e seis alunos, onze raparigas e quinze rapazes, com idades compreendidas entre os 16 e os 19 anos.

Era uma turma bastante homogénea com resultados relativamente fracos e apenas com um aluno no quadro de excelência (Tabela 6). O número de alunos com três ou mais negativas foi, respectivamente, de oito, cinco e três nos 1º, 2º e 3º períodos.

Tabela 6 - Turma 11ºB - Classificação média dos alunos

		Português	Inglês	Francês	Filosofia	Educação Física	Matemática	Física e Química	Biologia Geologia	Global
1º Período	Classificação	11,7	12,7	11	13,2	13,4	10	9,1	11,2	11,5
	Nº inscritos	24	18	4	23	24	25	26	25	
2º Período	Classificação	13,1	12,3	10,5	12,1	13,6	9	8,7	11,1	11,3
	Nº inscritos	22	18	4	23	23	24	26	25	
3º Período	Classificação	13,4	12,7	11,5	12,3	13,7	9,1	9,4	11,1	11,6
	Nº inscritos	22	17	4	23	23	21	19	23	

A disciplina de Física e Química A teve insucesso superior a 50% nos três períodos e a de Matemática A no 2º período. As disciplinas com maior percentagem de negativas foram a Física e Química A, com 63%, 70% e 60% respectivamente nos 1º, 2º e 3º períodos e a Matemática A com 48%, 63 % e 48% em iguais períodos. Sete alunos anularam a matrícula a Física e Química, cinco a Matemática, dois a Português, dois a Inglês, um a Filosofia e um a Educação Física.

Era uma turma com comportamento razoável a bom, também com os seus momentos de irrequietude.

Mostrava-se uma turma participativa, trabalhadora e empenhada, atenta às explicações, mas em que a grande falta de bases condicionava o ritmo de trabalho, a discussão em grande grupo e os resultados.

1.5. A disciplina Matemática A

Para os Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias e Ciências Socioeconómicas, a Matemática aparece como uma disciplina trienal da componente de Formação Específica a que é atribuída uma carga horária semanal de 4h 30m dividida por aulas de 90 minutos ao longo de 33 semanas letivas.

> A Matemática é considerada uma disciplina essencial do domínio do conhecimento e está concebida de forma a respeitar o princípio de continuidade pedagógica, exigindo uma gestão integrada dos programas.
>
> A Matemática é uma disciplina muito rica que, num mundo em mudança, abrange ideias tão díspares como as que são utilizadas na vida de todos os dias, na generalidade das profissões, em inúmeras áreas científicas e tecnológicas mais matematizadas e, ao mesmo tempo, é uma disciplina que tem gerado contribuições significativas para o conhecimento humano ao longo da história.
>
> …
>
> O programa de Matemática é organizado por grandes temas… Ao longo dos três anos do ensino secundário são abordados os seguintes temas: números e geometria, incluindo vectores e trigonometria; funções reais e análise infinitesimal; estatística e probabilidades. (ME, 2001, pp. 2)

No 11º Ano os grandes temas abordados são os seguintes: Geometria analítica no plano e no espaço II, Introdução ao Cálculo Diferencial I e Sucessões Reais.

1.6. O início do Estágio

Após alguma confusão e atraso na atribuição de escolas, o primeiro contacto com a Orientadora Pedagógica teve lugar na Escola a 19 de Setembro. Nesse dia, tivemos uma reunião na qual nos apresentámos, foram definidos horários, tarefas, objetivos, modos de trabalhar,… enfim uma série de bases.

No dia seguinte, iniciei a minha atividade como professora estagiária de Matemática e a Orientadora Pedagógica apresentou-me à turma do 11º A.

A primeira aula decorreu no laboratório de informática com a utilização do programa *Geometer Sketchpad* (GSP). De imediato, alguns alunos solicitaram a minha presença para os esclarecer sobre questões relacionadas com a tarefa que estavam a executar. Fiquei algo atrapalhada, porque não estava habituada a trabalhar com o programa. Porém, procurando um breve esclarecimento junto da Orientadora Pedagógica consegui ajudar os alunos e esclarecer as suas dúvidas. A partir desse dia, passei a ser presença diária nas aulas da turma do 11ºA. Se bem que pensasse que não iria intervir desde muito cedo, logo isso se mostrou que não seria verdade. Esta turma recebeu-me de forma aberta e aceitou-me praticamente desde o início.

A apresentação à turma do 11º B decorreu na segunda-feira seguinte, 25 de setembro. Esta turma, que eu iria acompanhar apenas regularmente durante 45 minutos semanais, também me acolheu como sua professora estagiária, embora o processo fosse naturalmente mais lento e menos efetivo do que com a turma do 11º A.

Uma das questões que sempre me preocupou nesta turma foi a maior demora com que retive os nomes dos alunos, pelo facto do menor contacto com os mesmos.

1.7. O horário de Estágio

Além das 4h30 de carga semanal atribuídas à Matemática, distribuídas por três blocos de 1h30 cada, a Direção da Escola Secundária Fernando Lopes-Graça incrementou o horário de um bloco extra de 45 minutos, de frequência obrigatória, e de uma sala de estudo, por turma, de 45 minutos, de frequência facultativa. Estes dois blocos de 45 minutos são contabilizados na componente não letiva dos docentes.

Durante o ano letivo, a minha presença nas aulas enquanto estagiária foi nos três blocos de 90 minutos na turma A e no bloco de 45 minutos com a turma B. Esporadicamente estive presente nos outros tempos. Realizei trabalho durante a minha presença na Escola, mas a maior parte do trabalho não letivo foi realizado fora da Escola.

Não posso dizer que apenas privilegiei a aprendizagem da prática letiva, quando ele se refere meramente à arte de ensinar neste caso a Matemática, pois considero que o trabalho de uma docente vai muito mais para além disso. Um docente deve ser responsável por participar ativamente na formação de indivíduos como um todo.

Posso dizer que gostaria de ter tido uma participação mais ativa em toda a vida escolar e uma ligação mais efetiva com outros docentes, mas tal não me foi possível à partida por condicionalismos de horário. Também não sei se, enquanto estagiária, estas práticas seriam bem aceites.

Capítulo 2. Prática Pedagógica

O presente capítulo apresenta uma reflexão sobre toda a aprendizagem realizada com a Orientadora Pedagógica e com a própria prática pedagógica enquanto estagiária.

Ao longo deste trabalho, por questões de brevidade de escrita, sempre que nos referimos a funções estamos a considerar funções reais de variável real, definidas no seu domínio.

2.1. Aprender… para imitar

O meu papel nas aulas presenciadas foi observar e aprender. E posso dizer que muito disto aconteceu.

A aprendizagem social, que assenta na imitação, traduz-se na capacidade de reproduzir um comportamento observado. De acordo com o psicólogo social Albert Bandura não aprendemos apenas pelos nossos mecanismos reflexos, nem pelas consequências que esperamos dos comportamentos. Em situações sociais, aprendemos especialmente através da imitação, observação e reprodução do comportamento dos outros, ou seja, grande parte das nossas aprendizagens efetuam-se através da observação dos modelos sociais existentes e com os quais contatamos, permitindo-nos formar uma imagem cognitiva de modo a agirmos e, posteriormente, servir como guia para as nossas ações. É possível aprender uma extensa gama de comportamentos sem que tenhamos de experimentá-los, bastando observá-los. A aprendizagem, por observação de um modelo, ocorre em quatro fases: observação, reprodução do comportamento observado, *feedback* pela execução do comportamento e aperfeiçoamento. De acordo com este modelo, a nossa aprendizagem seria muito mais demorada e deficiente se dependesse apenas dos resultados do nosso comportamento.

Em aulas mais expositivas, de trabalho em grande grupo, sentava-me muitas vezes na parte traseira da sala de modo a acompanhar a aula. Aí, acabava por captar observações pertinentes ou dificuldades de alguns alunos, sobretudo dos que se encontravam atrás, mais difíceis de aperceber por quem está a leccionar, e, quando achava oportuno, interferia ou informava "discretamente" a Orientadora Pedagógica". Acompanhava ainda alunos com mais "dificuldades" junto dos quais me sentava para esclarecer as suas dúvidas e lhes introduzir conceitos que não tivessem compreendido. Era frequente começar a aula numa posição e ir "saltando" por diversas posições.

Nas aulas de trabalho individual ou em pequeno grupo, normalmente aulas mais práticas, circulava na sala, tal como a Orientadora Pedagógica, auxiliando e tirando dúvidas. O objetivo não era responder às questões, mas levar os alunos a descobrir a resposta. De igual modo procedia nas aulas que decorriam na sala de informática. Na maioria das vezes era difícil estar constantemente a tirar notas que serviriam mais tarde para consolidar a minha aprendizagem. Porém, era muito mais proveitoso e enriquecedor ter uma participação ativa nas aulas.

Aquando da realização de exercícios, muitos alunos solicitavam que a Orientadora Pedagógica lhes desse algum tempo para experimentarem a sua resolução. Nestas alturas, outros alunos que, não queriam trabalhar, acabavam por incomodar os que queriam. Aqui colocava-se muitas vezes a questão que tipo de aula conduzir. Porém, a Orientadora Pedagógica, com a sua experiência, a sua versatilidade e o conhecimento profundo da turma, sabia como se adaptar às situações. Cada dia é um dia. Cada aluno é um indivíduo. Não há duas situações iguais entre si.

Dentro e fora da sala de aula foram tantas as aprendizagens retiradas e tantos os comportamentos dignos de ser imitados, que corro o risco de enumerar aqui apenas uma ínfima parte:

- Em primeiro lugar, a Orientadora Pedagógica tinha uma preocupação especial com todos os alunos, dentro e fora da sala de aula. A sua proximidade e cumplicidade com os alunos eram notórias, com certeza construída ao longo do ano anterior.
- Tanto se preocupava por transmitir valores e responsabilidades como se preocupava com o seu mal-estar, os seus obstáculos. Era raro o dia em que no final da aula um aluno não se lhe dirigia ou ela não solicitava a sua presença para falar sobre uma atitude, um problema, uma dificuldade,…ou até para esclarecer uma dúvida.
- A atitude da docente com os alunos era aberta, afável mas firme, não permitindo quaisquer comportamentos discriminatórios entre alunos. A integração dos alunos oriundos de outras turmas era sua constante preocupação. Na sala de aula estimulava a sua participação, valorizava as suas intervenções "Vamos…", raramente uma ideia não era aproveitável, conseguia retirar de cada observação algo viável e com sentido.
- O plano de aula era apenas um guião, em constante adaptação e revisão, consoante as necessidades de momento, as atitudes dos alunos, as dificuldades, …Referia muitas vezes que, quando consultava os planos de anos anteriores, verificava que a estratégia escolhida na altura era outra. Também ela se revia no papel de aprendente.

- Orientava a construção das demonstrações, de resultados, de raciocínios, de revisões,…, incentivando à ampla participação dos alunos, tanto espontânea como solicitada. Quase diariamente, uma ou mais vezes, percorria os alunos um a um, seguindo a ordem do lugar em que se sentavam, solicitando a sua contribuição para o raciocínio a estruturar, tendo sempre o cuidado de adaptar a questão ao interlocutor, tendo em conta as suas dificuldades.
- Precedendo a introdução de novos conceitos e seguindo o contorno do ensino em espiral, aproveitava para rever conceitos associados já estudados em períodos anteriores.
- Apelava à participação e à comunicação dos alunos em todas as aulas de formas diversas: do local, no quadro, privilegiando a comunicação e a construção de uma sequência lógica de frases com conceitos matemáticos. Era comum pedir a um aluno que explicasse aos colegas o seu raciocínio.
- Estimulava à diversificação de raciocínios, se bem que muitos alunos preferissem ir funcionando tipo “burrinho pelo carreiro”.
- Procurava incessantemente estratégias diferentes que conduzissem a uma aprendizagem mais eficaz. Era habitual repetir raciocínios, questões para confirmar e/ou consolidar aprendizagens.
- Fomentava o recurso às ferramentas, em especial a calculadora gráfica e a programas de geometria dinâmica, como facilitadores da visualização, rapidez e apreensão dos conceitos. No ano letivo em questão, cada turma teve cinco blocos na sala de informática.
- Tinha especial atenção à aprendizagem e ao aproveitamento dos alunos, colocando particular cuidado na elaboração de fichas de trabalho, fichas informativas, fichas de revisão, testes de avaliação sumativa, fichas de avaliação e tendo em conta as especificidades das turmas.
- Trabalhava os conteúdos com cuidado e rigor matemático.
- Valorizava as atitudes (assiduidade, pontualidade, comportamentos,…) dos alunos quando procedia à sua avaliação.
- Tinha uma preocupação contínua com todos os alunos, quer fossem da sua direção de turma, da outra turma ou mesmo não sendo seus.
- Privilegiava o contacto permanente com os Encarregados de Educação e com as famílias, por modo a cooperarem todos na formação do aluno como indivíduo.
- Dialogava constantemente com outros colegas da mesma área científica, partilhando informações, discutindo problemas, trocando materiais.

- Analisava, com colegas de outras disciplinas, situações que pudessem trabalhar conceitos de ambas as disciplinas de forma coerente.
- Tinha empenho efetivo com a Direção de Turma.
- Tinha preocupação contínua com a minha formação e aprendizagem e salientava que também ela aprendia com o trabalho de Orientadora Pedagógica, quer com os estagiários, quer com a faculdade.

2.2. Aulas supervisionadas

A prática de ensino supervisionada foi sempre precedida de um trabalho de preparação. Antes de iniciar a planificação, o tema e possíveis abordagens eram discutidas com a Orientadora Pedagógica. Além das indicações do Programa de Matemática A do 11º ano homologado pelo Ministério da Educação e das orientações do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), consultava diversos manuais para estudar abordagens alternativas e escolher a que considerava mais adequada, tendo sempre presente o tratamento seguido pelo manual adoptado pela Escola.

Elaborava, então, a primeira versão da planificação, tentando ser o mais completa possível. A planificação das aulas detalhada era revista e discutida com a Orientadora Pedagógica, tanto quanto se achasse necessário. Não tinha receio de colocar as minhas dúvidas, os meus anseios, tal como penso que a Orientadora Pedagógica não se coibia em comentar tudo o que achasse necessário, aliás fazia parte da sua tarefa como orientadora. Todas as suas observações foram muito bem aceites e considero que sempre serviram para melhorar a qualidade do meu trabalho.

Cada planificação era preparada tendo em conta os alunos, o momento e a continuidade, procurando sempre a forma mais adequada para levar os alunos a compreenderem e interiorizarem os conceitos e conquistar a sua atenção e interesse. Teve especial relevo para este fim, a utilização de diversos programas informáticos escolhidos consoante a sua adequação ao objetivo pretendido, o tipo de fichas elaboradas e, naturalmente, a sua impressão atempada.

Os planos de aula eram sempre deliberadamente ambiciosos para que se pudessem orientar as aulas seguintes e também para precaver um ritmo superior ao esperado. De qualquer forma, o número de aulas inicialmente previstas em cada plano era normalmente ultrapassado.

As planificações serviam como um guião e as aulas tomavam o curso que melhor se adaptava à compreensão da turma. Eram implementadas estratégias de momento, tais como a inclusão de mais exemplos, demonstrações alternativas,… tudo pela boa assimilação de conceitos e sempre com a preocupação de esclarecer todas as questões dos alunos.

No início de cada bloco, se se provava conveniente, fazia um apanhado da aula anterior e, no decorrer desse bloco, tentava sempre rever matéria, encadear com conceitos aprendidos em alturas anteriores. No final de cada dia, fazia com a Orientadora Pedagógica, uma análise crítica da prática letiva, pontos fracos e pontos fortes, tópicos a melhorar, comparando com o bloco equivalente lecionado na outra turma, onde se teriam usado formas diferentes de abordar a matéria.

Apreciei sempre o facto da Orientadora Pedagógica intervir durante a minha prática letiva e nunca o senti como sinónimo da minha incapacidade, antes pelo contrário, entendi-o como uma interação em prol da aprendizagem dos alunos.

A prática de ensino supervisionada teve início apenas no mês Outubro, de modo a permitir-me assistir previamente a diversas aulas lecionadas pela Orientadora Pedagógica, conhecer os alunos, sentir-me mais segura e confiante. Foram 25 as aulas supervisionadas, oito das quais supervisionados pelos docentes da faculdade, os Orientadores Científicos Professora Doutora Maria Helena Santos e Professor Doutor Filipe Marques, sendo que no primeiro bloco o Professor Doutor Filipe Marques não estaria presente por se encontrar de licença sabática.

2.2.1. Aulas de 24, 25, 26 e 27 de outubro de 2011

Estas aulas foram supervisionadas pela Orientadora Pedagógica, Professora Lourdes Ventura.

O tópico dizia respeito ao estudo das Equações Trigonométricas.

As aulas planificadas tinham como objetivo a consolidação de conhecimentos de Trigonometria e a aplicação dos mesmos para:

- Resolver problemas
- Resolver equações e inequações trigonométricas elementares

A Orientadora Pedagógica começou por corrigir o trabalho de casa, pois os alunos tinham manifestado dúvidas, e só depois passei a conduzir a aula. A preocupação de não me esquecer dos nomes dos alunos, de não cometer erros científicos, de prender a turma, de conseguir que adquirissem os conteúdos esteve sempre presente, como esteve sempre latente algum nervosismo, que se foi diluindo à medida que o tempo avançava. A presença da Orientadora Pedagógica funcionou como um estímulo e um suporte.

A planificação foi elaborada para um mínimo de duas aulas. A primeira foi em 24 de Outubro e serviria para estudar equações trigonométricas envolvendo o seno e o cosseno de um ângulo. Na realidade, já tínhamos analisado o facto do plano ser algo ambicioso e foi isso que aconteceu. Só foram abordadas equações com seno e não a totalidade de exemplos que estavam previstos, mas, entretanto, foram introduzidos outros exemplos, que a interação e as dúvidas levantadas pelos alunos a isso conduziram. Por outro lado, o facto da aula ter sido iniciada com a correção de um trabalho de casa também reduziu o tempo disponível.

De qualquer forma, para as equações envolvendo o cosseno estava guardado muito menos tempo, pois sendo quase uma repetição das equações com seno e tendo estas ficado bem apreendidas, depressa se passava para as equações com cosseno.

Para mais fácil visualização e interpretação, utilizei o programa *TI-Nspire* e recorri, em simultâneo, ao desenho do círculo trigonométrico no quadro. Fui solicitando o auxílio dos alunos para a utilização do programa *TI-Nspire* e foram tantos os que se ofereceram que a dificuldade esteve em escolher, tentando não deixar nenhum de fora. A visualização no círculo trigonométrico foi essencial para os alunos perceberem que, de uma maneira geral, há duas soluções de uma equação do tipo $sen\, x = sen\, \alpha$ no intervalo $\left[0,2\pi\right]$. Foi pedida a participação dos alunos para determinarem estas soluções, para relacionarem uma solução com a outra, para escreverem a expressão geral das soluções e para compreenderem em que situações existe apenas uma solução no intervalo $\left[0,2\pi\right]$. A visualização no gráfico cartesiano foi importante para melhor compreensão.

A Orientadora Pedagógica sugeriu que a aula seguinte começasse por uma sistematização da matéria dada, facto que para mim era já um ponto assente. O que é uma função? O que é uma equação? Será que os alunos compreendem bem a diferença?

A minha organização do quadro foi alvo de alguns reparos pelo que, no dia seguinte, tentei melhorar esse aspecto. Era preciso, no entanto, ter em atenção que o quadro desta sala é bastante pequeno e que os ritmos diferentes e mais lentos de certos alunos, a passar do quadro, não permitem a organização desejável.

À parte isso, a aula decorreu bem, consegui cativar os alunos, expor bem a matéria e os alunos aprenderam, como foi possível comprovar no dia seguinte.

Para trabalho de casa foram indicados alguns exercícios da ficha 5A.

A aula seguinte iniciou-se com a correção do trabalho de casa, tentando uma sistematização dos conteúdos leccionados e uma verificação da aquisição e consolidação dos conceitos. Passou-se ao estudo da função cosseno, em tudo muito semelhante à função seno, tendo sido assinaladas as diferenças.

Foram sistematizados quatro casos possíveis:

- A equação é elementar, i.e., consegue-se igualar uma função seno ou uma função cosseno a um valor.
- A equação torna-se uma equação elementar graças às propriedades das razões trigonométricas, i.e., em que se tem uma função seno igual a uma função cosseno e em que se consegue, por exemplo, passar a função cosseno a uma função seno mercê das referidas propriedades.
- Um dos membros da equação é um produto e é possível usar os casos notáveis da multiplicação ou a lei do anulamento do produto.
- A equação é do 2º grau e torna-se necessário, numa primeira fase, recorrer à fórmula resolvente para, em seguida, resolver uma equação trigonométrica elementar.

Quanto à função tangente, mereceu mais tempo de atenção, por ser diferente das primeiras e não ser tão clara para os alunos, nomeadamente em termos de leitura no círculo trigonométrico.

No dia seguinte, retomou-se o estudo das equações trigonométricas e introduziu-se o estudo das inequações trigonométricas. Foi necessário reavivar a análise das inequações em geral. Em relação às inequações, o programa *TI-Nspire* foi de grande utilidade para melhor visualização.

O dia a seguir destinou-se à resolução de exercícios para consolidação da matéria.

A aula subsequente, de 31 de outubro, já conduzida pela Orientadora Pedagógica, foi ainda dedicada à resolução de exercícios das fichas de trabalho 5A e 6A.

Este grupo de aulas desenrolou-se com a participação ativa dos alunos. Optou-se por uma dinâmica de grande grupo com o recurso à participação voluntária e solicitada de todos, uma vez que se introduziam novos conceitos que deveriam contar com a atenção generalizada. Os alunos foram acompanhando os raciocínios, evidenciando, no entanto, algumas dificuldades na resolução de equações deste tipo. A visualização no suporte informático e no quadro provaram-se muito importantes para a aquisição destes conteúdos, que à partida não são fáceis para os alunos. Ao longo dos blocos, a planificação inicial foi sofrendo algumas alterações no momento, sempre na tentativa de a adequar às necessidades, ritmos e requisitos dos alunos. Foram introduzidos outros exemplos de equações, não explicitados, à medida que se ia provando necessário. Aqui se evidencia que o plano deve ter um papel meramente orientador e não deve limitar a atividade em sala de aula.

A atenção que foi colocada na elaboração das fichas de trabalho permitiu produzir um trabalho que facilitou a consolidação de conhecimentos. A resolução das fichas 5A e 6A teve lugar ao longo dos blocos, sendo escolhidos os exercícios de acordo com a matéria já lecionada.

2.2.2. Aulas de 30 de novembro e 12 de dezembro de 2011

As aulas do primeiro dia foram supervisionadas pela Orientadora Científica, Professora Maria Helena Santos, e pela Orientadora Pedagógica, Professora Lourdes Ventura e as seguintes apenas pela Orientadora Pedagógica.

O tópico dizia respeito ao estudo da Equação Cartesiana do Plano.

As aulas planificadas tinham como objetivo a aquisição de conhecimentos no sentido de:

- Visualizar a representação de planos no espaço
- Aplicar a noção de produto escalar para determinação de equações de planos
- Escrever uma equação cartesiana de um plano definido por um ponto do plano e um vetor perpendicular a esse plano
- Escrever uma equação cartesiana de um plano definido por três pontos não colineares
- Escrever uma equação cartesiana de um plano definido por uma reta e um ponto do plano exterior a essa recta
- Escrever uma equação cartesiana de um plano definido por duas retas concorrentes
- Escrever uma equação cartesiana de um plano definido por duas retas estritamente paralelas

A planificação estava estruturada de modo a passar duma análise do plano para o espaço. Começou por se explorar com os alunos o que representava no plano e no espaço a condição $y = 3$. De seguida, examinou-se a condição $y = x + 3$. Relembraram-se ainda outros conceitos estudados no 10º ano, tais como, planos paralelos aos eixos, modos de definir um plano. Usando a noção de vector normal a um plano, os alunos foram levados a deduzir a equação cartesiana do plano. Para uma melhor visualização dos planos no espaço com diferentes perspectivas, usou-se o programa *Derive*.

A presença da Orientadora Científica, não sendo habitual, foi para mim um factor que me deixou pouco à vontade e me induziu a um comportamento pouco natural.

De acordo com a Orientadora Científica, o plano estava muito completo e foi pena não ter aproveitado tudo o que aí estava previsto. Com a preocupação de cumprir a planificação, não explorei as equações dos planos não paralelos a cada um dos eixos coordenados, como estava detalhado no plano, não sendo este assunto, portanto, tratado com a profundidade que merecia.

A Orientadora Científica elogiou o facto de eu ter demonstrado garantir sempre a resposta aos alunos, mesmo que por vezes não acontecesse de imediato, para não interromper um raciocínio ou uma outra questão que estivessem em análise.

As aulas seguintes, de 5 e 6 de dezembro, foram dedicadas à resolução de uma ficha de revisão, antecedendo o teste de avaliação sumativa, que teve lugar a 7 de dezembro.

A 12 de dezembro retomei o tema da equação cartesiana do plano e dei também a aula à turma do 11º B nesse dia, seguindo o mesmo plano. Uma vez que tinha já decorrido bastante tempo desde a última aula deste tópico, foi necessário fazer uma revisão mais prolongada. Deduziu-se a única equação do plano que faltava e procedeu-se à resolução de exercícios da ficha de trabalho 10A para consolidação.

Mais uma vez se optou por uma dinâmica de grande grupo com o recurso à participação voluntária e solicitada de todos bem como à utilização de recursos informáticos. Desta vez, escolhi o programa *Derive,* pelo facto de permitir aos alunos visualizar melhor o posicionamento dos planos no espaço, tendo sido necessário aprofundar previamente as suas potencialidades. A resolução da ficha de trabalho 10A teve lugar ao longo dos dois blocos e os exercícios foram sendo escolhidos de acordo com a matéria já lecionada.

2.2.3. Aulas de 23, 24 e 25 de janeiro de 2012

Estas aulas foram supervisionadas pela Orientadora Pedagógica, Professora Lourdes Ventura.

O tópico dizia respeito ao estudo da Funções Racionais.

As aulas tinham, então, como objetivo o estudo das Funções Racionais e a introdução do conceito de limite e de assíntota ao gráfico de uma função.

- Seria feito o estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções: $f(x) = a + \dfrac{b}{cx+d}$, $cx + d \neq 0$.
- Seria feito o estudo das seguintes propriedades: domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos yy e à origem, sendo aqui introduzidos os conceitos de assíntotas e limites nos ramos infinitos.
- Neste estudo, enfatizar-se-ia a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma família.

- Seriam resolvidos problemas envolvendo as funções deste tipo e as estudadas no 10ºano, tanto sob os aspectos analíticos como numéricos e gráficos. A resolução de equações e inequações fracionárias deveriam aparecer num contexto de resolução de problemas.
- O conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e de $-\infty$, a ser formalizado mais tarde, deveria ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito). Neste contexto, ao serem introduzidos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, seria chamada a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso.

Estas aulas encontram-se detalhadamente descritas no documento de investigação.

No início da aula, foi introduzida a noção de função racional. De seguida, foi solicitado ao alunos o estudo da função f definida por $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$. Este estudo suscitou algumas surpresas, pois tratava-se de uma função cujo domínio não era IR e que levantou dúvidas em termos de continuidade e monotonia. Foram introduzidos os conceitos de limite e de assíntotas, que também se revelaram difíceis de interiorizar. O recurso à representação gráfica, quer através da calculadora gráfica, do programa *TI-Nspire* ou do quadro provou-se essencial para a compreensão destes conceitos e a estagiária viu-se na necessidade de reinventar modos alternativos para cumprir esse objetivo. No fim da aula, ficou a noção de que certos conceitos teriam de ser revisitados, pois careciam de amadurecimento. Para trabalho de casa foi o estudo de duas funções do tipo $f(x)=\frac{a}{x}, x \neq 0 \; e \; a \neq 0$.

No dia seguinte, depois de corrigido o trabalho de casa, foram relembradas as transformações dos gráficos de funções estudadas no ano letivo anterior, para que depois os alunos pudessem responder a um exercício da ficha de trabalho 21A com transformações aplicadas às Funções Racionais.

No terceiro dia, sentiu-se a necessidade de trabalhar de novo as noções de continuidade, limites e assíntotas, pois os alunos continuavam a evidenciar muitas dúvidas. Passou-se ao estudo de outras Funções Racionais e avançou-se para a ficha de trabalho 22A.

A observação destas aulas tinha por objetivo o levantamento de dados para o trabalho de investigação da estagiária.

As aulas decorreram na sua maioria em grande grupo, com alguns apontamentos de trabalho individual. Recorreu-se bastante à visualização da representação gráfica confrontada com a expressão algébrica, que se provou ser fundamental para a assimilação dos conceitos. A planificação foi, como habitual, preparada com todo o cuidado, bem como as fichas de trabalho 19A, 20A, 21A e 22A. A exposição e discussão em sala de aula foram bastante participadas e exigentes, o que é bastante motivador.

2.2.4. Aulas de 16, 17 e 18 de abril de 2012

As aulas do primeiro dia foram supervisionadas pelos Orientadores Científicos, Professora Doutora Maria Helena Santos e Professor Doutor Filipe Marques e pela Orientadora Pedagógica, Professora Lourdes Ventura, as do segundo dia pela Orientadora Científica, Professora Doutora Maria Helena Santos e pela Orientadora Pedagógica, Professora Lourdes Ventura e as dos restantes dias apenas pela Orientadora Pedagógica.

O tópico dizia respeito ao estudo da Taxa Média de Variação e da Derivada.

As aulas planificadas tinham como objetivo a seguinte aquisição de conhecimentos:

- Definir taxa média de variação, calcular a taxa média de variação de uma função contínua num intervalo, interpretar o seu significado e graficamente, reconhecer as suas limitações
- Definir taxa de variação: obter a taxa de variação (valor para que tende a taxa média de variação quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples, interpretar geometricamente a taxa de variação
- Definir derivada recorrendo à noção intuitiva de limite, identificar a derivada com a taxa de variação e interpretar o seu significado do ponto de vista físico e geométrico
- Identificar pontos onde não existe derivada
- Determinar a derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.
- Escrever uma equação da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto ou com uma dada direção
- Relacionar o gráfico de uma função com o da sua função derivada
- Aplicar o estudo da função derivada à determinação dos extremos e intervalos de monotonia de uma função
- Constatar, por argumentos geométricos, que:
    - Se a derivada é positiva num intervalo aberto, a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto, a função é decrescente nesse intervalo

    - Se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo, então a derivada é nula nesse ponto
- Usar a derivada para resolver problemas de otimização

A aula iniciou-se com a introdução do conceito de taxa média de variação, utilizando dois exemplos patentes numa ficha de trabalho e prosseguindo depois com os mesmos exemplos para o conceito de derivada. Essa ficha de trabalho iria acompanhar toda a lecionação deste grupo de aulas.

No primeiro dia o ritmo da aula não foi o mais adequado, fruto de condicionantes externas ao estágio. O meu nervosismo era evidente, de tal forma que tive dificuldade em me lembrar do nome dos alunos quando apelava à sua participação, tendo, no entanto, conseguido disfarçar este facto. Sobre esta falta de cadência também me chamaram a atenção os Orientadores.

Um defeito que foi levantado pelos Orientadores Científicos foi o facto de um dos exercícios da ficha de trabalho 28A, que serviu para ilustrar o estudo da derivada, ter um traçado contínuo e não ter sido explicitado aos alunos que se estava a considerar uma extensão a IR.

Outro dos problemas assinalado pelos mesmos Orientadores Científicos, foi estar escrito na planificação "a derivada no ponto A de abcissa -2", quando deveria estar escrito "a derivada de f para $x = -2$".

O segundo dia foi essencialmente dedicado ao estudo da função derivada e aí o ritmo já foi adequado. O estudo destes conceitos em ambos os dias foi feito recorrendo ao programa de geometria dinâmica *Geogebra*, uma ferramenta que se mostrou adequada a este fim. As aulas decorreram maioritariamente em grande grupo para assegurar uma discussão centralizada e pontualmente houve trabalho individual ou em pequenos grupos para a resolução de exercícios da ficha de trabalho 28A.

O terceiro dia foi dedicado à resolução de exercícios para consolidação de conhecimentos.

2.2.5. Aulas de 21 de maio de 2012

As aulas foram supervisionadas pela Orientadora Científica, Professora Doutora Maria Helena Santos e pela Orientadora Pedagógica, Professora Lourdes Ventura.

O tópico dizia respeito ao estudo das Progressões Geométricas.

Esta aula tinha, então, como objetivo a aquisição de conhecimentos e a aplicação dos mesmos no sentido de:

- Identificar progressões geométricas
- Deduzir a expressão do termo geral de uma progressão geométrica
- Identificar e definir, por recorrência e pelo termo geral, progressões geométricas
- Usar as progressões geométricas na resolução de problemas

Comecei por dar este bloco à turma B, o que serviu de treino e me deixou muito mais à vontade para a aula da turma A que iria ser assistida pela Orientadora Científica.

A aula correu bem, sendo, no entanto, notórias as dificuldades de cálculo desta turma. Foi, assim, necessário relembrar a multiplicação e divisão de potências com a mesma base e com o mesmo expoente, muito importantes para o cálculo dos termos das progressões geométricas, o que levou a que poucos exercícios da ficha de trabalho tivessem sido resolvidos.

No caso da aula lecionada na turma A, foi do consenso geral que a aula correu bem.

Porém, a Orientadora Científica considerou que orientei um pouco a aula. Temo discordar, uma vez que considero ter seguido as necessidades dos alunos. Foi aqui também necessário relembrar as operações com potências com a mesma base e com o mesmo expoente, conhecimentos que estavam esquecidos, mas que rapidamente os alunos conseguiram aplicar.

Por outro lado, a Orientadora Científica não concordou com a dedução, realizada em aula, da expressão do termo geral de uma progressão geométrica, quando não se tem o primeiro termo. Na planificação encontrava-se feita de forma adequada e rigorosa e em aula baseou-se na extrapolação de um exemplo, achando a Orientadora Científica que não terá sido suficientemente referido que um exemplo não garante a universalidade. A dedução foi realizada de forma intuitiva pelos alunos, facto que a estagiária considerou importante, prevendo retomá-la na aula seguinte, para a realizar com rigor.

Foram preparadas as fichas de trabalho 36A e 37A, sendo que a primeira englobava uma série de exercícios para consolidação da matéria, alguns para serem elaborados em sala de aula outros em casa, e a segunda destinava-se a trabalho de casa para introduzir o tópico seguinte relativo à monotonia das progressões geométricas.

Todo o trabalho prévio de planificação e consequente elaboração de fichas de trabalho, de escolha e aprofundamento dos recursos tecnológicos mais adequados foi levado a cabo de uma forma cuidadosa, criteriosa e empenhada. Foi também com empenho e rigor a forma com que procurei transmitir às aprendizagens aos alunos.

Todas as aulas contaram com a participação ativa dos alunos, como é habitual nestas turmas, em especial na turma do 11º A, o que procurei sempre estimular como verdadeira fonte de troca de saberes.

Explorei a utilização dos recursos informáticos como ferramenta facilitadora da aprendizagem, na medida em que permitem uma melhor visualização das representações gráficas e cativar mais os alunos.

A falta de experiência de lecionação e os mais de trinta anos que me separam do contacto com estas matérias condicionaram a minha atitude perante as aulas supervisionadas pelo nervosismo que me imprimiram e que não me é muito habitual.

Considerei muito importantes e pertinentes os comentários à minha prática letiva que me foram sendo dirigidos pelos Orientadores e encarei-os numa perspectiva de melhoramento contínuo essencial à minha formação.

2.3. Aulas não supervisionadas

Por motivos de saúde da Orientadora Pedagógica, lecionei parte da aula de 16 de janeiro da turma do 11º A e a totalidade da aula da turma do 11º B. A aula foi dedicada à resolução de exercícios de programação linear, seguindo um plano já definido pela Orientadora Pedagógica. A aula correu bem e foram atingidos os objetivos propostos.

Pontualmente, lecionei ainda partes de aulas em que a Orientadora Pedagógica se teve de ausentar por um ou outro motivo, sendo o plano de aula por ela definido.

2.4. Trabalhos de casa

No âmbito das aulas supervisionadas, concebi fichas de trabalho, algumas das quais foram objeto de trabalho de casa. Corrigi esses e outros trabalhos de casa.

Nalgumas situações, elaborei mapas resumo com o levantamento das resoluções dos alunos.

Elaborei por vezes alguns mapas com o levantamento de quem realizou os trabalhos para casa e das dificuldades sentidas. Esta era uma das situações mais desagradáveis para mim, pois os alunos viam-me como um "polícia" (em sentido depreciativo) e não conseguiam alcançar que o nosso objetivo era auxiliá-los na aprendizagem, encaminhando-os para um trabalho de consolidação de conhecimentos.

2.5. Avaliação

No contexto da avaliação, efetuei várias tarefas, nomeadamente:

- Participei na concepção dos testes de avaliação sumativa, essencialmente, resolvendo-os, por forma a verificar a sua adequabilidade no grau de dificuldade e tempo de resolução, sugerindo alterações, quando considerava necessário. Pontualmente, propus exercícios (por exemplo, o último teste de avaliação sumativa inclui um dos exercícios de progressões geométricas que concebi para a parte de escolha múltipla).
- Disponibilizei aos alunos a resolução dos testes através do *e-mail* das turmas.
- Participei na definição dos critérios de correção e corrigi alguns testes, quer da turma do 11º A, quer da turma do 11º B. Nalgumas situações, elaborei mapas resumo com o levantamento das resoluções dos alunos.
- Participei ainda na elaboração de grelhas de avaliação, discutindo os critérios respectivos.
- Estive na vigilância do teste intermédio e em testes de avaliação sumativa de ambas as turmas.

2.6. Programas utilizados nas aulas lecionadas

A Orientadora Pedagógica lecionou cinco blocos na sala de informática, recorrendo ao programa *Geometer Sketchpad* (GSP).

Pelo meu lado, nas aulas lecionadas, recorri a diversas ferramentas informáticas, nomeadamente, à calculadora gráfica e a programas de geometria dinâmica, nomeadamente, *Geogebra* e *Derive*, tendo em vista uma mais fácil aprendizagem através de uma melhor visualização, maior rapidez e mais motivação. O incentivo à utilização da calculadora gráfica foi constante, tendo em conta que é uma ferramenta de trabalho e que, regra geral, todos os alunos têm disponível.

Na turma do 11ºA, todos os alunos têm calculadoras da marca *Texas Instruments* e apenas uma aluna apresenta um modelo da *Casio*.

Capítulo 3. Atividades fora das horas letivas

No presente capítulo são descritas uma série de atividades realizadas fora das horas letivas, nomeadamente, trabalho de Direção de Turma, tarefas no âmbito do Projeto de Atividades Educativas, aulas de apoio a aluno com necessidades educativas especiais (NEE), tarefas utilizando a plataforma Inovar, atividades propostas no Plano Anual de Atividades e apoio aos alunos no contexto do jogo Quest4K. São ainda relatadas participações em visitas de estudo promovidas pelas disciplinas de Filosofia e de Biologia e Geologia, em palestras, sessões de esclarecimentos e convívios.

3.1. Direção de Turma

Estando a Direção de Turma do 11º A atribuída à Orientadora Pedagógica, ficou sobre minha responsabilidade acompanhá-la nesta tarefa.

Tal como definido no Regulamento Interno da ESFLG, o Diretor de Turma é designado pelo Diretor de entre os professores da mesma, sempre que possível pertencente ao quadro da escola, e são suas competências:

- Assegurar a articulação entre professores da turma e alunos, Pais e Encarregados de Educação e pessoal não docente, criando e/ou disponibilizando para o efeito canais de comunicação adequados.
- Promover a comunicação e formas de trabalho cooperativo entre professores e alunos.
- Coordenar, em colaboração com os docentes da turma, a adequação de atividades, conteúdos, estratégias e métodos de trabalho à situação concreta do grupo e à especificidade de cada aluno.
- Articular as atividades da turma com os Pais e Encarregados de Educação, promovendo a sua participação.
- Coordenar as reuniões de avaliação, garantindo o seu carácter globalizante e integrador.
- Sensibilizar, esclarecer e informar todos os Encarregados de Educação para o direito que todos os alunos têm a candidatarem-se ao Apoio Social Escolar.
- Disponibilizar, aos representantes eleitos, os nomes e respectivos contactos de todos os Encarregados de Educação da turma, bem como da Associação de Pais e Encarregados de Educação.

 - Apresentar ao Diretor um relatório crítico anual do trabalho desenvolvido.
 - Presidir ao Conselho de Turma, estrutura responsável pela elaboração de um plano curricular de turma, para a organização, o acompanhamento e a avaliação dos alunos, que deve integrar estratégias de diferenciação pedagógica e de adequação, destinadas a promover a melhoria das condições de aprendizagem e a articulação escola-família.

Considerando a Direção de Turma de extraordinária importância para o sucesso de uma Escola e dos alunos que ela forma, tive a oportunidade de participar tão ativamente quanto a minha disponibilidade o permitia numa das tarefas que me é mais grata no seio da comunidade escolar.

Assim, no que diz respeito:

- À Direção da Escola
  - Participei no contacto com a mesma em questões relacionadas com os alunos.

É de salientar a disponibilidade e abertura com que a Direção da Escola aborda estas questões.

- Ao Conselho de Turma
  - Participei nas reuniões do Conselho de Turma e colaborei na sua preparação, na elaboração das atas e na execução dos registos de avaliação.
  - Participei no contacto permanente com os professores das outras disciplinas para acompanhamento do percurso dos alunos, capacidades, aquisição de conhecimentos, dificuldades e comportamento.

As reuniões de avaliação tiveram lugar a 20 de dezembro de 2011, 27 de março de 2012 e 11 de junho de 2012.

Extraordinariamente importante é partilhar experiências entre professores, entender as atitudes e aprendizagens dos alunos em função de diversas variáveis (disciplina, professor que a leciona, período, …), perceber como cada professor vê cada aluno, como cada aluno reage a certo professor, qual a postura mais adequada para conquistar cada aluno,...

Os membros do Conselho da Turma do 11º A mostraram-se, ao longo do ano, -se interessados em partilhar experiências, debater questões relacionadas com os alunos e procurar soluções.

- Ao pessoal não docente
  - Participei na articulação entre alunos e pessoal não docente, nomeadamente, em questões relacionadas com o respeito de regras de funcionamento.

Uma palavra especial para muito do pessoal não docente que está atento, cuida dos “seus meninos” e se preocupa com as suas atitudes, colaborando na formação de um indivíduo.

- Aos Encarregados de Educação
  - Participei nas reuniões e colaborei na sua preparação, na elaboração das apresentações e das atas, e no seu envio para o representante dos Encarregados de Educação.
  - Colaborei na promoção do contacto permanente com os Encarregados de Educação.
  - Colaborei na divulgação de todas as informações relevantes referentes à Escola, nomeadamente, informações disponíveis no *site* da Escola.
  - Participei no envio de avaliações intercalares de final de período.
  - A partir do Inovar, elaborei um mapa de faltas, em Excel, que atualizava semanalmente.
  - Participei no envio semanal da comunicação de faltas para os Encarregados de Educação.
  - Participei no envio de registos de comportamento.

Nas reuniões com os Encarregados de Educação, a Orientadora Pedagógica teve a delicadeza de me apresentar como colaboradora ativa no trabalho de Direção de Turma e, no fim das referidas reuniões, era agradável verificar que os Encarregados de Educação também me abordavam no sentido de debater questões relacionadas com os seus educandos.

As reuniões de período com Encarregados de Educação tiveram lugar a 11 de janeiro de 2012 e 18 de abril de 2012.

Extraordinariamente importante é ter a hipóteses de contatar diretamente com parte da realidade familiar de cada aluno, poder compreender também os desejos e anseios das famílias, permitindo perceber o porquê de certas atitudes, com o objetivo de melhor ajudar o aluno no seu processo de aprendizagem.

Os Encarregados de Educação da Turma A mostraram-se regra geral razoavelmente participativos e interessados em partilhar informação e em colaborar com a Escola.

- Alunos
  - Participei em sessões de informação promovidas pelo Serviço de Psicologia e Orientação (SPO) e dirigidas aos alunos sobre alternativas de formação.
  - Participei no encaminhamento de um aluno, por solicitação do Encarregado de Educação, para sessões de avaliação e orientação psicopedagógica no Serviço à Comunidade da Faculdade de Psicologia da Universidade de Lisboa.
  - Participei na promoção pelo respeito de regras de funcionamento.
  - Colaborei na promoção do contacto permanente e troca de ideias com os alunos, anseios, receios, comportamentos, aprendizagem.

Os minutos que antecediam ou precediam as aulas eram de uma extrema importância no contacto com os alunos. Aí, era possível discutir com eles os seus anseios, receios, comportamentos, aprendizagem, dificuldades, expectativas. Alguns deles, talvez mercê de alguma imaturidade, apresentam comportamentos e resultados aquém do expectável, ressentindo-se muitas vezes deste facto. É preciso falar com eles, para que percebam que estamos ali para os ajudar, é preciso estudar com eles formas de ultrapassar estas dificuldades.

- Participei em sessões espontâneas em sala de aula em que a turma debatia questões de interesse geral, nomeadamente, relacionadas com resultados e comportamentos noutras disciplinas.

Durante todo o ano pude observar e analisar constantemente os alunos e discutir diariamente com a Orientadora Pedagógica questões relacionadas com comportamentos e aprendizagem, reações, capacidades, aquisição de conhecimentos, dificuldades, família, com o objetivo de estudar alternativas conducentes ao seu sucesso como indivíduos em todas as vertentes.

Para além de leccionar em sala de aula, esta foi a tarefa que mais enriquecimento me trouxe. O diálogo, a articulação, o poder participar ativamente no sucesso da comunidade escolar é como uma estrutura que se ajuda a construir para uma sociedade melhor.

3.2. Projeto Atividades Educativas

O projeto Atividades Educativas consiste numa bolsa de professores de substituição, para suprir a falta de um docente numa determinada hora e turma. Estas substituições dizem respeito a ausências de curta duração de docentes, sendo os professores da bolsa listados por ordem alfabética e por ordem crescente do número de aulas de substituição efetuadas.

O Projeto Atividades Educativas fazia parte das horas não letivas atribuídas à Orientadora Pedagógica. A tarefa consistia na elaboração e atualização, duas vezes por semana, de mapas elaborados em Excel. No Serviço de PBX, responsável por chamar os professores de substituição, eram entregues as folhas com os nomes disponíveis por hora, onde seriam depois registadas as substituições efetuadas. Na sala de professores, eram afixadas as folhas com as horas de substituição efetuadas por professor.

No início do estágio ficou definido que a outra estagiária acompanharia a Orientadora Pedagógica nesta tarefa. Porém, a partir de certa altura, mesmo antes da sua desistência do estágio, comecei a auxiliar nesta tarefa.

3.3. Apoio a aluno do 7º ano com necessidades educativas especiais

O apoio a um aluno do 7º ano com necessidades educativas especiais (NEE) estava a cargo do núcleo de estágio. Este apoio consistia num trabalho individualizado de Matemática, dado que o aluno não se encontrava integrado no horário normal de uma turma a esta disciplina, e decorria uma vez por semana no gabinete do SPO. A partir de segundo período, passei a colaborar nesta tarefa, sempre que para isso fui solicitada, quer conjuntamente com a Orientadora Pedagógica, quer individualmente.

Foram-se desenvolvendo atividades de diagnóstico e tarefas ao nível do 1º ciclo, com o objetivo de:

> Desenvolver … o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos. (ME, 2001, pp. 13)
>
> Desenvolver … o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a noção de grandeza e respectivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos e de medida em contextos diversos. (ME, 2001, pp. 20)

3.4. Programa Inovar

A Escola dispõe de um programa, Inovar, no qual é centralizada toda a informação respeitante aos alunos.

Durante o estágio utilizei esta plataforma diariamente, quer na escola, quer acedendo a partir de casa, para escrever sumários, lançar faltas, registar datas de avaliações, consultar os registos das referidas faltas para elaborar os *e-mails* que semanalmente eram enviados aos Encarregados de Educação, consultar dados introduzidos pelos outros docentes do Conselho de Turma,…

Durante os períodos de avaliação esta plataforma era uma ferramenta essencial e obrigatória para registo, consulta e lançamento de dados. Daí eram emanados os registos de avaliação enviados aos Encarregados de Educação.

3.5. Plano Anual de Atividades - *Facebook*

Para fazer parte do plano de atividades da Escola no ano letivo de 2011/2012 propus como uma das atividades do núcleo de estágio a elaboração de um blogue (página no *Facebook* ou similar) da Matemática por turma. Esta atividade enquadrava-se nos objetivos definidos pela Escola de promover o gosto pelas aprendizagens e pela procura autónoma dos saberes, formar alunos participativos e interventivos na vida da escola, promover a autonomia e a capacidade crítica dos alunos, fomentar a diversidade de estratégias na sala de aula e dinamizar a utilização das Tecnologias de Informação pela comunidade escolar. Neste blogue deveriam ser trocadas informações relativas à disciplina, levantadas e resolvidas dúvidas, divulgadas informações, apresentadas propostas, desafios,...

Depois de aprovada, esta atividade foi proposta aos alunos da turma do 11ºA que a aceitaram e por unanimidade escolheram a criação de um grupo fechado no *Facebook* com o nome de "Cantinho da Matemática". O grupo foi criado em 18 de outubro de 2012 por um dos alunos e ficou, com três administradores, dois alunos e eu. Conta com 20 membros, apenas não fazendo parte deste grupo três dos alunos inscritos na disciplina de Matemática, por não usarem este veículo de comunicação, e um aluno não inscrito na disciplina.

Tem sido utilizado com regularidade para envio e troca de informações, pedido de esclarecimento de dúvidas,…, mas poderia ter uma utilização melhor se a dinâmica de grupo, de trabalho conjunto e de partilha fosse maior. De qualquer forma, pensa-se que as bases estão lançadas e que este projeto terá continuidade no próximo ano.

Paralelamente, existe o *e-mail* da turma do 11º A, turmaflg@hotmail.com, para onde enviava regularmente informações, documentos, nomeadamente, exercícios, resoluções,… Desde muito cedo comecei a fazer estes envios também para o *e-mail* da Turma do 11º B, 10balunos@gmail.com.

À semelhança da turma do 11º A, em fevereiro de 2012 questionámos a turma do 11º B se pretendia a criação de um grupo no *Facebook*, o que foi aceite unanimemente, mas tardou em ser criado. Este grupo, o "Papa Dúvidas", foi criado em 12 de março de 2012 por uma das alunas e conta com 16 membros, nos quais eu me incluo. A utilização tem sido muito reduzida, talvez porque foi criado já numa fase avançada do ano letivo, mas, essencialmente, porque a dinâmica de trabalho destes alunos é muito reduzida.

3.6. Plano Anual de Atividades – História da Matemática

Para fazer parte do plano de atividades da Escola no ano letivo de 2011/2012 propus como uma das atividades do núcleo de estágio apresentações subordinadas a temas relacionados com a História da Matemática com o objetivo de:

- Promover o gosto pelas aprendizagens e pela procura autónoma dos saberes
- Formar alunos participativos e interventivos na vida da escola
- Promover a autonomia e a capacidade crítica dos alunos
- Fomentar a diversidade de estratégias na sala de aula
- Fomentar uma maior participação dos pais na vida da escola
- Dar a conhecer aspectos da História da Matemática, suscitando no aluno o desejo de saber como se originaram e desenvolveram os assuntos em Matemática
- Humanizar o estudo da Matemática, mostrando-a como ciência em construção e em constante interação com outras ciências e com campos tão variados como a arte, a religião, a filosofia e os ofícios e apreciar o seu contributo para a resolução de problemas através do tempo
- Desenvolver no aluno a capacidade de comunicar e de preparar apresentações

Os alunos, organizados em grupos de dois a quatro elementos, deveriam escolher um tema relacionado com a História da Matemática, dentro dos que lhe fossem sugeridos ou outro que eles propusessem e que se enquadrasse no contexto desta atividade. Os alunos deveriam investigar fontes de informação diversa, algumas das quais lhes poderiam ser sugeridas ou disponibilizadas, e deviam preparar uma apresentação dinâmica (e.g., *Power Point*), sendo acompanhados em todo o processo de investigação e de elaboração das apresentações pela Orientadora Pedagógica e pela estagiária.

Os Encarregados de Educação, pais e outras pessoas seriam convidadas a assistir às diversas apresentações (cada uma com a duração máxima de 15 a 20 minutos) em horário pós laboral, segundo um programa a organizar conjuntamente pelos alunos, pela Orientadora Pedagógica e pela estagiária.

Sugeriu-se ainda que essas apresentações pudessem ser integradas nos monitores de comunicação que se encontram no pavilhão C.

As datas-chave do trabalho foram as seguintes: até 24 de fevereiro de 2012 foram definidos os grupos e escolhidos os temas, em 21 de março de 2012 foram entregues os trabalhos escritos, em 21 de maio de 2012 foram entregues as apresentações, em 31 de maio de 2012 foram ensaiadas as apresentações e em 5 de junho de 2012 foi feita a apresentação aos pais.

Apesar da forte resistência demonstrada pelos alunos na elaboração deste trabalho, por considerarem que não se enquadrava no âmbito do programa da disciplina e não constituía objeto de avaliação, o produto final, que culminou com a apresentação aos pais, professores e colegas da turma, teve um resultado francamente positivo e acabou por agradar a quem esteve envolvido. Houve lugar à aprendizagem de assuntos relacionados com a História da Matemática, conduzindo à sua humanização, ao mesmo tempo que se promoveu a participação dos pais na vida escolar.

3.7. Quest4K

O *Quest 4K* (*Quest for Knowledge* / Demanda pelo Conhecimento) é um jogo de computador *online* destinado a ajudar a aprender matemática, ao mesmo tempo que se podem desafiar outros jogadores e ganhar prémios. Todas as semanas os jogadores têm de superar desafios de Matemática, adaptados ao seu ano e nível de conhecimento.

Participei numa ação de divulgação deste jogo feita pela empresa junto da Escola e ajudei a passar a mensagem junto dos alunos. Na turma do 11º A são quatro os alunos inscritos, se bem que um terá desistido. Todos os outros se mantêm em jogo e, por vezes, solicitam o auxílio para a resolução de desafios que lhes são lançados. Estes alunos foram apurados para participar na final nacional.

3.8. Visitas de Estudo

Acompanhei a visita de estudo promovida pela docente da disciplina de Filosofia à Assembleia da República no dia 27 de janeiro. De acordo com o descrito no Plano de Atividades para o ano letivo em curso, esta visita visava promover a educação para a cidadania no respeito pela diferença, combater o abandono escolar, incentivar o sucesso, e suscitar a interiorização, por parte dos alunos, de valores sociais e de regras de conduta.

Acompanhei também a visita de estudo promovida pela docente da disciplina de Biologia e Geologia a Sintra no dia 19 de março, no âmbito do projeto Bio+Sintra; que visava o desenvolvimento de comportamentos favoráveis a um ambiente sustentável.

Esta visita de estudo, inserida na semana da Escola, estendeu-se por todo o dia, incluindo piquenique, e contou com todos os alunos das turmas do 11º A e do 11º B, à exceção de um aluno da turma do 11º B. Nela, procedeu-se ao corte e/ou arranque de acácias, uma planta que os monitores desta atividade nos referiram como invasora e prejudicial ao crescimento de outras plantas. Além de participar nesta tarefa, tirei ainda 255 fotografias aos alunos e docentes que acompanharam a visita, recolhendo imagens da sua dinâmica num espaço a que pouco estão habituados.

3.9. Palestras e sessões de esclarecimento

Acompanhei os alunos numa palestra sobre Jornalismo no âmbito da recolha de informações sobre alternativas profissionais, que ocorreu a 21 de março de 2012 inserida na Semana na Escola.

Participei numa sessão de esclarecimento conduzida pela Psicóloga do Serviço de Psicologia e Orientação sobre os percursos escolares. Foram apresentadas várias hipóteses de formações universitárias e cálculo das médias, temas muito caros aos alunos e portanto muito participados. Aproveitei para relatar um pouco da minha experiência pessoal, contribuindo com informações que possuía sobre o assunto.

3.10. Aula de Educação Física sobre dança

Participei numa aula de dança no final de ano letivo promovida pelo professor de Educação Física da turma do 11º A, onde se pretendia que os alunos evidenciassem as suas aprendizagens e passassem os saberes aos professores das outras disciplinas da turma. Visto se tratar do último dia de aulas, a presença dos alunos foi escassa, bem como dos professores, só estando representada, para além da disciplina de Educação Física, a disciplina de Matemática.

3.11. Convívios

Fui ao arraial que ocorreu na Escola na noite de 6 de junho de 2012, onde pude, num ambiente mais informal, contactar com alunos e professores e apreciar a dinâmica da Escola inserida numa comunidade.

Estive presente em dois almoços promovidos no final dos períodos letivos, que ocorreram, respectivamente em 20 de dezembro de 2011 e em 27 de março de 2012, no refeitório da Escola.

Participei num jantar de final de ano que decorreu no dia 9 de junho de 2012 numa pizzaria na Parede com praticamente todos os alunos e professores da turma do 11º A. No final, os alunos ofereceram um cartão assinado por todos eles aos professores que vão deixar de ser seus, por as disciplinas não fazerem parte do seu currículo do 12º ano. Foi muito gratificante ter sido englobada nesse grupo dos professores e ter também recebido um cartão.

Parte II

Relatório de Investigação

As funções, o seu ensino e aprendizagem

Capítulo 1. Introdução

O presente capítulo introdutório pretende apresentar o trabalho de investigação patente neste documento. São aqui reveladas as motivações pessoais, justificada a pertinência do estudo realizado e identificados os objetivos. Por fim, é sintetizada a organização do documento.

1.1. Motivações pessoais

A investigadora é licenciada em Engenharia Mecânica pelo Instituto Superior Técnico e, posteriormente, tirou um *Master in Business and Administration* pela Universidade Nova de Lisboa. A sua vida profissional tem sido, maioritariamente, na área da Engenharia e da Gestão, sendo que durante esses anos fez sempre o possível por acompanhar estagiários. A experiência em ensinar Matemática tem-se limitado a explicações (ensino particular) que deu nos seus tempos de estudante e outras que tem dado de há dois a três anos para cá. No entanto, a sua motivação para enveredar por esta área remonta aos tempos da frequência do Ensino Básico, rumo que não tomou por algumas alterações de percursos que assumiu na sua juventude.

No ano letivo de 2007/2008, com a abertura do Mestrado do Ensino da Matemática na Universidade Nova de Lisboa, após a remodelação dos cursos ao abrigo do Processo de Bolonha, estando num momento de atividade profissional menos intensa, resolveu inscrever-se no mesmo. Porém, após um ano letivo que apenas pôde frequentar a meio termo, teve de assumir existirem incompatibilidades que, quer pessoal quer profissionalmente, não lhe permitiam continuar.

Assim que lhe foi possível, retomou o referido Mestrado, facto que ocorreu a partir do ano letivo de 2010/2011, apesar de ainda manter muitas restrições em termos de horários. No presente ano letivo, ano de estágio, tem feito um esforço para, junto da Escola, da Orientadora e dos Alunos que a acolheram cumprir as suas responsabilidades e aproveitar ao máximo os ensinamentos que daí está a retirar. Tem também sido este espírito com que tem encarado a sua frequência na Faculdade, quer a nível de participação nas aulas, quer na elaboração de trabalhos e prestação de provas.

Com esta formação, pretende obter habilitações para vir a leccionar Matemática, mas, essencialmente, renovar e incrementar conhecimentos, tomar contacto com a realidade do ensino da disciplina, com a sala de aula, e daí retirar todos os ensinamentos que lhe forem possíveis para o exercício de uma profissão que um dia espera venha a ser a sua.

No sentido da melhoria de formação dos alunos e do seu desenvolvimento consistente como indivíduos, o papel do professor é de extraordinária relevância. Ensinar não é uma rotina, mas uma arte em que o professor se desdobra, cria e recria, um processo de diagnóstico, avaliação e reformulação permanentes, criando novos caminhos adaptados às situações concretas com se depara.

Estar comprometido com um processo em que se procura elevar o ato de aprender, em que se participa na educação do aluno para que ele possa descobrir e descobrir-se, aumentando as suas competências, em que se contribui para a construção de valores e atitudes do aluno, de modo a que se torne um cidadão esclarecido, responsável, cooperante, participativo na sociedade só pode ser altamente enriquecedor, motivante e recompensador.

1.2. Pertinência do estudo

O insucesso e a incompreensão é algo com que a Matemática se debate. Para muitos alunos a Matemática representa uma série de "contas" fastidiosas, cálculos e mais cálculos, mas pior do que tudo, problemas que obrigam a exercitar a mente e que não lhes permitem limitar-se a aplicar receitas que entretanto conseguiram decorar. Por outro lado, sentem-se de certa forma desresponsabilizados, quando frequentemente ouvem em casa "eu também nunca fui bom a Matemática". A maioria nem percebe o porquê de os obrigarem a aprender semelhantes matérias, não vê qualquer aplicação prática e o facto de muitas vezes não verem relação com uma realidade é porventura um factor que os desmotiva.

Mas na verdade, a Matemática está presente em toda a nossa vida, desde os tempos mais remotos, mesmo nas mais pequeninas coisas, mesmo no mundo do imaginário, do fantástico, da Alice no País das Maravilhas, do Harry Potter a que as crianças e os jovens estão habituados; sem ela não se vive. A Matemática é um dos motores da evolução da Humanidade e é relevante a abordagem da sua História para melhor compreender o seu papel fundamental ao longo dos tempos, em estreita ligação com outros ramos do saber. Nesse sentido, os programas acentuam a necessidade de recorrer a exemplos da vida real e a atividades numa perspectiva histórica de modo a humanizar o seu estudo, "*mostrando a Matemática como ciência em construção e em constante interação com outras ciências*" (ME, 2001, pp.12).

> A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, constituem uma oportunidade de abordar o método científico.
>
> …
>
> O papel da matemática como instrumento de modelação da realidade é incontornável: um modelo matemático é uma descrição matemática do mundo real. (ME, 2001, pp. 11)

Outro dos factores de desalento será a dificuldade de manipulação de conceitos base com que muitos alunos se deparam. Os temas abordados num ano já foram na maioria das vezes explorados em anos anteriores e o ensino em espiral volta a relembrá-los para serem aprofundados e incrementados. Quando o que está para trás não foi compreendido, trabalhado, o ponto de partida não é o mesmo que deveria ser e o aluno, que está um passo atrás, não consegue apanhar e acompanhar o ritmo que o cumprimento de um programa impõe. Acresce a este facto, que a Matemática é uma disciplina que requer dedicação, trabalho autónomo, no qual o aluno é confrontado com situações problemáticas novas que vai ter de ultrapassar. Mas se por um lado, a Matemática pode ser o prazer da descoberta, por outro, a desmotivação, os conhecimentos deficitários e o pouco treino podem inviabilizar o encadeamento e articulação de ideias, a construção de raciocínios coerentes e estruturados e a interpretação de resultados com atitude crítica que conduziriam à resolução dessas novas situações.

Adicionalmente, os programas apelam à correta verbalização dos raciocínios, sendo este processo uma forma de organizar, consolidar e ampliar o seu conhecimento matemático.

> Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as atividades tenham em conta a correção da comunicação oral e escrita. O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, sempre que tal for aconselhável, à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese. (ME, 2001, pp. 11)

As funções são um tema rico que permite explorar as questões acima levantadas, são uma matéria recorrente, abordada ao longo dos vários ciclos, dos vários anos e por diversas vezes nesses períodos, que apelam constantemente a competências anteriormente adquiridas. Aparecem como um conceito matemático intimamente ligado a acontecimentos do mundo em que vivemos, a situações da vida corrente, da Física, da Geometria, da Economia ou de outras disciplinas. Conseguir construir uma função que represente uma situação, saber reconhecer que uma determinada função pode representar um modelo para uma situação é algo que os alunos podem perceber que tem uma aplicação prática. As funções são também ricas em representações, obrigando à visualização, relacionamento e tradução entre esses modos, que o recurso às tecnologias permite dar vida e movimento e libertar o aluno de algumas tarefas mais fastidiosas. Conseguir estruturar o pensamento e comunicar corretamente estes processos é algo que no estudo das funções se apresenta de especial relevo, pode ser estimulante, uma porta de entrada para o querer saber matemático.

1.3. Objetivo do estudo

O objetivo de um professor é levar os alunos à aprendizagem do conceito de função; o que representa uma função, a sua importância como representação de acontecimentos reais, a aquisição de ferramentas para compreender e estudar funções e a tentativa de mudança de comportamento no sentido de conseguir que os alunos se tornem mais críticos perante os resultados obtidos.

Sem um estudo aprofundado sobre o assunto, observa-se constantemente a dificuldade que os alunos experimentam ao trabalhar funções, quer na sua vertente gráfica, quer na sua vertente analítica e a tradução entre as duas representações.

O objetivo deste trabalho é compreender:

- Qual é o conceito que os alunos têm de função?
- Quais as representações que privilegiam para identificar o conceito?
- Que processos utilizam na tradução entre as diferentes representações de funções?

O foco deste estudo é a aprendizagem dos alunos, uma reflexão sobre os conceitos apreendidos observando as práticas de ensino, não se pretendendo, no entanto, fazer uma análise crítica ao modo como os conteúdos foram leccionados. De qualquer forma, este estudo poderá servir como futura ferramenta de trabalho para avaliar, repensar e redesenhar as estratégias implementadas, de modo que os alunos possam, de forma mais eficaz, interiorizar o conceito de função, alcançar o significado de todos os parâmetros envolvidos na sua representação e manipulá-la com compreensão.

1.4. Organização do documento

O presente documento encontra-se organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo abrange uma introdução ao estudo efetuado, na qual são reveladas as motivações pessoais, a pertinência e os objetivos do estudo. O segundo encerra uma revisão da literatura no que se refere a aprendizagem de conceitos ou noções matemáticas. O terceiro capítulo apresenta a metodologia escolhida, descrevendo a abordagem utilizada, os procedimentos de recolha de dados, os métodos usados e a amostra escolhida. O quarto capítulo engloba o levantamento pormenorizado, incluindo a descrição das aulas lecionadas no âmbito do presente trabalho, das entrevistas conduzidas, dos documentos recolhidos, ao mesmo tempo que é feita uma súmula e análise reflexiva sobre cada uma das etapas. O quinto capítulo corresponde às conclusões.

Capítulo 2. Revisão de literatura

Este capítulo encerra uma revisão de literatura no que se refere a aprendizagem de conceitos ou noções matemáticas. Aqui são abordadas as teorias de Anna Sfard e de Shlomo Vinner. Seguidamente, é referida a importância das diferentes representações e da tradução entre elas na compreensão de um conceito. Ao longo de todo o texto é feito o paralelo com o conceito de função.

2.1. Aprendizagem dos conceitos matemáticos

A aprendizagem de conceitos ou noções matemáticas, entendidas como as ideias matemáticas na sua forma "oficial" (Sfard, 1991), é objeto de estudo de diversos autores.

Compreender, mais do que saber ou ver, foi sempre considerado um objetivo importante pelos matemáticos. Ir compreendendo é um processo que ocorre na mente do aluno. Pode ser rápido, quase instantâneo, mas, mais frequentemente, é baseado numa longa sequência de atividades de aprendizagem durante as quais uma grande variedade de processos mentais ocorre e interage. O que quer dizer compreender um conceito matemático é muito difícil de analisar (Dreyfus, 1994).

Quando se decide sobre a pedagogia do ensino da Matemática há que ter em conta não só a questão de como se espera que os alunos adquiram os conceitos matemáticos, mas, também e talvez principalmente, como os alunos realmente adquirem esses conceitos (Vinner, 1994).

Antes de partir para a investigação sobre a aprendizagem do conceito função e da articulação entre as diversas formas de representação era indiscutível a necessidade de leitura de alguns textos, por forma a orientar de forma mais eficaz os passos subsequentes dessa investigação.

Não sendo possível ler toda a bibliografia disponível sobre o assunto, tomou-se como ponto de partida a tese do professor António Domingos, algumas das citações, bem como algumas das referências bibliográficas aí incluídas. Foram ainda consultados outros artigos e documentos.

2.2. Um modelo de aprendizagem de conceitos matemáticos segundo Sfard

Numa perspectiva ontológica-psicológica, Anna Sfard (1991) defende que os conceitos matemáticos, tais como número ou função, podem ser concebidos de duas maneiras diferentes. Uma concepção operacional – segundo a qual as noções matemáticas são concebidas como um resultado de certos processos ou são identificadas com os próprios processos – e uma concepção estrutural – onde as noções matemáticas são tratadas como se se referissem a entidades como objetos.

Ver uma entidade matemática como um objeto é ser capaz de a referir como uma coisa real e de reconhecer a ideia sem entrar em detalhes. Interpretar a noção como um processo implica vê-la não como uma entidade atual, mas como uma potencial entidade, que existirá na sequência de uma série de ações.

Enquanto a concepção estrutural é estática, instantânea e integrativa, mais abstrata, a concepção operacional é dinâmica, sequencial e detalhada.

Do ponto de vista estrutural, a função pode ser vista como o conjunto de pares ordenados (Bourbaki 1934; citado por Sfard, 1991); do ponto de vista operacional, a função será o processo computacional ou método bem definido para ir de um sistema para outro (Skemp, 1931; citado por Sfard, 1991). Essas duas abordagens, embora incompatíveis, são na verdade complementares, indispensáveis para compreender profundamente a matemática, consistindo a aprendizagem numa interação entre as duas.

Com base na teoria cognitiva e em exemplos históricos, conjectura-se que o primeiro passo para a aquisição de novos conceitos matemáticos é, na maioria das vezes, a concepção operacional. Um processo é transformado num objeto abstrato autónomo num nível mais elevado, para poder funcionar como uma unidade básica em construções matemáticas mais avançadas. Sendo assim, a abordagem estrutural é uma fase mais avançada do desenvolvimento conceptual.

A transição de uma abordagem para outra está, segundo Sfard (1987; citada por Domingos, 1994), dependente do desenvolvimento histórico e também da aprendizagem individual.

A aprendizagem não se processa de igual modo em todos os indivíduos, sendo a transição das operações computacionais para objetos abstratos um processo longo e difícil, realizado em três etapas (Sfard, 1991):

- Interiorização

O aluno executa processos com objetos matemáticos elementares, que eventualmente darão origem a um novo conceito. Vai-se tornando cada vez mais hábil. O processo é interiorizado, quando puder ser realizado através de representações mentais e quando, para poder ser considerado, analisado e comparado, não precisar de ser efetuado no momento.

No caso do conceito de função, é aprendida a noção de variável e o aluno é capaz de achar os valores da variável dependente utilizando uma fórmula.

- Condensação

As longas sequências de operações são comprimidas dando origem a unidades mais fáceis de trabalhar, o aluno torna-se capaz de pensar sobre um dado processo como um todo, sem serem indicadas as operações, é um processo de *input/output*. É nesta altura que nasce o novo conceito. Ao combinar o processo com outros processos, torna-se mais fácil fazer comparações e generalizações. A condensação dura enquanto a nova entidade matemática permanecer fortemente ligada a um processo. Nesta fase, há evolução quando o aluno for capaz de alternar facilmente entre diferentes representações dum conceito.

No caso do conceito de função, traduz-se pela facilidade com que o aluno for capaz de trabalhar com as funções como um todo, sem necessidade de olhar para os seus valores específicos. Poderá investigar, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções, encontrar o inverso.

- Reificação (concretização)

Uma vez que temos limitações, não somos capazes de lidar com processos super complexos sem os partir em peças mais pequenas. Ultrapassamos esta dificuldade convertendo processos em objetos abstratos. A reificação acontece quando se consegue identificar uma entidade matemática que é completamente nova como um objeto com significado próprio, autónomo e completo. O conceito reificado pode servir de base à formação de novos conceitos de nível superior. Esta última fase acontece de uma forma instantânea.

O conceito de função é reificado quando o aluno compreender na íntegra as diversas representações que a função pode assumir e passar facilmente de uma representação para outra, quando for capaz de resolver equações onde as incógnitas são funções, quando conseguir falar sobre as propriedades gerais dos diferentes processos realizados com funções e quando reconhecer que a computabilidade (cálculos algébricos) não é uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções.

A Matemática e as outras ciências têm muitas analogias, pois ambas falam de universos com objetos, objetos com certas características e sujeitos a certos processos. Porém, os objetos matemáticos são abstratos, totalmente inacessíveis aos nossos sentidos, só visíveis pela mente. A criação matemática dificilmente pode ser atingida sem “ver” objetos abstratos. A grande dificuldade que os alunos ainda sentem face à Matemática, a sua inacessibilidade, pode estar relacionada com este facto.

O processo de reificação é difícil de atingir, mas uma vez conseguido, facilita a produção matemática. Por sua vez, a competência na execução dos processos inerentes ao pensamento operacional é uma base para a compreensão dos conceitos. A demora na reificação e os inerentes períodos de dúvidas sobre o significado do conceito podem levar à convicção de que nunca se conseguirá aprender, com consequências permanentes do ponto de vista educacional. Aqueles que não estão preparados para lutar pelo significado (reificação) rapidamente desistem de tentar aprender matemática.

É possível fazer uma abordagem puramente operacional (Sfard, 1992; citada por Domingos, 1994), mas para que a aprendizagem cumpra os seus objetivos, são importantes as duas abordagens.

Para Sfard (1989, 1992; citada por Domingos, 1994), os novos conceitos não devem ser introduzidos segundo uma concepção estrutural e esta não deve ir para além daquilo que os alunos conseguem fazer. Será pouco proveitoso introduzir novas noções matemáticas por meio das suas descrições estruturais. A abordagem operacional deverá preceder a estrutural uma vez que esta última, sendo muito mais abstrata, não tem muitas hipóteses de motivar, senão quando for indispensável para passar a um nível superior da teoria.

Sfard (1989, 1992; citada por Domingos, 1994) considera também que a visão das funções como objetos só é necessária quando se pretende o tratamento em simultâneo de várias funções, e aí, cada uma é tratada como um todo. No cálculo básico, os alunos podem utilizar apenas uma concepção operacional do conceito de função.

Diferentes representações de função podem ser interpretadas de forma mais estrutural ou operacional. Por exemplo, a representação de uma função usando um programa de computador corresponde a uma concepção mais operacional, uma vez que se trata de um processo computacional. Já a sua representação gráfica, em que a linha traduz uma série de elementos integrados como um todo, induz a uma concepção estrutural. Por sua vez, a expressão algébrica pode ser vista operacionalmente, como a descrição de procedimentos de cálculo, ou estruturalmente, como a relação estática entre duas magnitudes.

As duas concepções também se revelam nas representações mentais que as pessoas fazem ao processar o conhecimento. De certa forma, as representações verbais parecem mais adequadas a uma concepção operacional, enquanto as representações visuais parecem adaptar-se mais a uma concepção estrutural.

Na literatura matemática, psicológica, filosófica são mencionadas diversas dicotomias do universo matemático. Porém, a maioria não presta atenção à questão dos pressupostos filosóficos subjacentes à atividade do pensamento matemático. Simultaneamente, separam as componentes dessa dicotomia, enquanto Sfard (1991) defende a sua complementaridade. Como exemplo dessa dicotomia, Piaget distingue também dois tipos de pensamento matemático: figurativo e operativo.

A partir dum trabalho realizado com alunos de escolas de Jerusalém em que o ensino da função é abordado de forma estrutural, Sfard (1989; citada por Domingos, 1994) chegou às seguintes conclusões:

- A concepção estrutural de função é rara nos alunos.

Estes apresentam alguma dificuldade em considerar uma coleção de pares ordenados como uma entidade única. Algumas entidades abstratas como o domínio, contradomínio, objetos e imagens são, por vezes, vagos e a confusão geral é a reação mais comum a problemas que requerem identificação das diferentes componentes de uma dada função.

- A definição de função não é interpretada para além do que está incluído nela, mas antes no que lhe falta.

Embora a definição não utilize a noção de operação, a maioria dos intervenientes associaram as funções a processos computacionais. A concepção de função, nos alunos, acaba por ser determinada operacionalmente e não estruturalmente.

Os alunos revelaram dificuldades na identificação de funções idênticas com expressões analíticas diferentes e na interpretação da função constante, pois faltava-lhes a variável independente para poder determinar a dependente.

- Há a tendência dos alunos em associar as funções com fórmulas algébricas.

Sfard considera que esta tendência tanto pode indicar uma concepção operacional como uma concepção estrutural, isto é**,** o aluno pode entender a fórmula como uma descrição de um algoritmo computacional ou como uma relação estática entre pares ordenados.

Com base no estudo feito com outro grupo de alunos das escolas de Jerusalém sobre o conceito de função a partir de uma abordagem operacional, Sfard (1989; citada por Domingos, 1994) chegou às seguintes conclusões:

- Nas primeiras tentativas de transição para a abordagem estrutural, houve alguma resistência e falta de compreensão, mas as dificuldades foram diminuindo com o tempo, nunca desaparecendo totalmente.
- Uma representação onde não houvesse algo de computável era considerada como não sendo função.
- Apenas um pequeno grupo de alunos considerou o termo função como sinónimo de fórmula ou equação.

2.3. Um modelo de aprendizagem de conceitos matemáticos segundo Vinner

Shlomo Vinner (citado por Tall, 1994) distingue entre a definição abstrata de um conceito exposta numa teoria matemática e o conceito imagem concebido na mente pelo indivíduo.

As definições podem criar sérios problemas na aprendizagem, pois induzem o conflito entre a estrutura da Matemática, concebida por matemáticos e os processos cognitivos de aquisição de conceito.

A Matemática é uma teoria dedutiva, que com noções primárias e axiomas conhecidos através de uma sequência de deduções define outras noções. Os professores de Matemática podem planificar as suas aulas como uma sequência de definições, teoremas e provas, mas seguir este esquema pode ser pedagogicamente pouco eficaz, uma vez que o ensino não deve esquecer os processos psicológicos de aquisição de conceitos e de raciocínio lógico.

Uma das abordagens do conceito de função é desenvolvida por Vinner (1983; citado por Domingos, 1994). Pressupõe a existência de duas células diferentes na nossa estrutura cognitiva: uma célula para o conceito definição e a outra célula para o conceito imagem.

O nome de um conceito quando visto ou ouvido é um estímulo para a nossa memória. Algo é evocado pelo nome do conceito na nossa memória. Geralmente, não é a definição do conceito, mesmo no caso em que o conceito tem uma definição. O conceito imagem é algo não-verbal que aparece na nossa mente associado ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, se este a tiver, pode também ser um conjunto de imagens mentais, impressões ou experiências. Todas estas representações visuais, imagens mentais, impressões ou experiências podem ser traduzidas em formas verbais. Porém, estas formas verbais não são a primeira coisa recordada na nossa memória, aparecem numa fase posterior.

O conceito definição tem a ver com uma definição verbal que explica exatamente o conceito (Vinner, 1983; citado por Domingos, 1994). A definição pode ser aprendida sob forma de rotina ou, por vezes, ser uma reconstrução pessoal. Tem, naturalmente, importância a forma das palavras usadas para especificar esse conceito.

Quando se ouve a palavra "função", podemos lembrar a expressão $y = f(x)$, pensar noutras funções específicas como $y = x$, $y = \sin x$, $y = \ln x$, visualizar um gráfico de uma função, etc..

Só é possível falar de conceito imagem para cada indivíduo específico. Além disso, o mesmo indivíduo pode reagir de forma diferente a um determinado nome de conceito em diferentes situações.

Saber de cor um conceito definição não garante a compreensão do conceito. Compreender significa ter um conceito imagem e o significado deve ser associado com as palavras. Adquirir um conceito significa formar um conceito imagem para ele. O pensamento é guiado pelo conceito imagem e não pelo conceito definição. O conceito definição poderá permanecer inativo e, muitas vezes, pode ser esquecido (Vinner, 1983; citado por Domingos, 1994). A maioria dos conceitos na vida quotidiana é adquirida sem qualquer envolvimento de definições. Porém, alguns conceitos podem ser introduzidos por definições. As definições ajudam a formar um conceito imagem. Mas no momento em que a imagem é formada, a definição pode tornar-se dispensável.

Para Vinner (1991), quando é colocado um problema num contexto técnico, não se deve formular a sua solução sem consultar a célula do conceito definição. Este é, naturalmente, o processo desejável, mas, infelizmente, nem sempre ocorre. É difícil contrariar um sistema cognitivo para agir contra a sua natureza e forçá-lo a consultar as definições, quando na maioria dos casos da vida quotidiana a referência à célula do conceito imagem é suficiente e bem sucedida. Este facto não incentiva a reportar à célula do conceito definição. Só problemas não rotineiros, em que os conceitos imagem incompletos podem ser enganosos, podem incentivar a consulta do conceito definição.

Um currículo de Matemática deve ser determinado de acordo com os objetivos educacionais. Se os alunos são candidatos a trabalhar conceitos de Matemática avançada, as definições devem ser dadas e discutidas, apontados e analisados os conflitos entre o conceito imagem e a definição formal e os alunos devem ser treinados para usar as definições como um critério final nas tarefas matemáticas. Este objetivo só pode ser alcançado se os alunos receberem tarefas que não podem ser resolvidas corretamente referindo-se apenas ao conceito imagem. Enquanto bastar referir-se ao conceito imagem, o aluno manter-se-á assim porque esta estratégia é simples, natural e espontânea. Somente uma falta o pode convencer que tem que usar o conceito definição como um critério final. Assim, mudar os hábitos dos alunos de vida quotidiana para o modo técnico é uma meta importante para o ensino de Matemática. Isso não pode ser feito num curto espaço de tempo e poderá não ser bem sucedido com todos os alunos (Vinner, 1991). Por outro lado, para os alunos que não são candidatos à Matemática avançada, pode ser preferível evitar estes conflitos. Se os alunos memorizarem a definição formal e a repetirem em diversas ocasiões, o professor pode até sentir que concluiu a sua tarefa, mas não deve ter ilusões sobre o poder cognitivo dessa definição formal sobre o pensamento matemático do aluno. A definição, ensinada através do conceito definição, pode assumir e modelar o conceito imagem. Muitas vezes, o conceito imagem é inteiramente moldado por alguns exemplos e não se adapta ao conceito definição (Vinner, 1992; citado por Domingos, 1994).

Num questionário aos alunos do 10º e 11º graus, Vinner (1983; citado por Domingos, 1994) tentou identificar o conceito definição e o conceito imagem de função manifestado por estes. Encontrou assim diferentes abordagens de cada um destes conceitos:

Conceito definição:

- É a definição do manual, muitas vezes misturada com elementos do conceito imagem e referida pelas palavras dos alunos de forma incorreta.
- É uma regra de correspondência, sendo eliminadas as correspondências arbitrárias.
- É um termo algébrico, uma fórmula, uma equação, uma manipulação aritmética, etc., parecendo haver uma interação entre as células do conceito definição e imagem, este último dominante.
- Alguns elementos da imagem mental são tomados como a definição para os conceitos, as funções são identificadas com gráficos, símbolos como $y = f(x)$ ou diagramas de setas.

Conceito imagem:

- Uma função é uma regra, duas ou mais regras serão várias funções; as correspondências arbitrárias são uma infinidade de funções.
- Uma função são várias regras relacionadas com domínios diferentes; uma correspondência com regra e com uma exceção não parece ser considerada como função.
- As funções (que não são algébricas) existem somente se os matemáticos as reconhecerem como tal.
- Um gráfico de uma função deve ser "razoável", simétrico, contínuo, por vezes crescente ou decrescente, etc..
- Na relação entre as variáveis independente e dependente, para cada valor de x, do domínio da função, existe apenas um valor de y, do contradomínio, que lhe corresponde.
- Uma função é considerada como uma correspondência um a um.

Nas respostas a um questionário anónimo a alunos do primeiro ano do ensino superior e de professores dos anos de escolaridade 5-8 não especializados em Matemática, Vinner e Dreyfus (1989; citados por Domingos, 1994), encontraram as seguintes características:

Conceito definição:

- Correspondência, em que uma função é considerada como uma correspondência entre dois conjuntos que designa para cada elemento do primeiro conjunto exatamente um elemento no segundo.
- Relação de dependência, em que uma função é considerada uma relação de dependência entre duas variáveis (y depende de x).
- Regra, uma função é uma regra e é esperado que ela tenha uma certa regularidade, atendendo a que uma correspondência pode ser "arbitrária".
- Operação, em que uma função é uma operação ou uma manipulação de números através de operações algébricas por forma a obter as suas imagens.
- Fórmula, uma função é interpretada como uma fórmula, uma expressão algébrica ou uma equação.
- Representação, em que a função é identificada com uma das suas representações gráficas ou simbólicas (por exemplo, $y = f(x)$).

Conceito imagem:

- Univocidade (*onevaluedness*), a correspondência só é considerada função se representar exatamente um valor para cada elemento no seu domínio, caso contrário não é função.
- Descontinuidade, se o gráfico tem uma lacuna a correspondência é descontínua num ponto do seu domínio.
- Divisão do domínio, se o domínio da correspondência se divide em dois subconjuntos do domínio, com uma regra diferente em cada um deles, então o gráfico pode mudar as suas características de um subconjunto para o outro.
- Ponto excepcional, ponto onde a regra geral de correspondência não funciona.

2.4. Compreender um conceito. Representações de um mesmo conceito

Compreender um conceito é estar apto a utilizá-lo. Compreender um conceito está relacionado com a forma como se interpretam as suas diferentes representações. Os conceitos matemáticos podem apresentar diversas representações e é importante tê-las, mas é sobretudo importante saber usá-las e compreender a relação entre elas. Os alunos devem ter a capacidade e a flexibilidade de compreender conceitos nas suas diferentes representações e a utilização destas vai ajudá-los a passar de uma compreensão mais limitada para outra mais abrangente, pois a correta articulação entre as diferentes representações permite confirmar e corrigir raciocínios.

É importante ter diferentes representações de um conceito, mas a sua existência não é suficiente para criar um uso flexível desse conceito na resolução de problemas. Precisamos mudar de uma representação para outra, quando essa outra for mais eficaz para o próximo passo que queremos dar. Passar de uma representação para outra está intimamente associado com o procedimento de as representar. Ensinar e aprender este processo não é fácil, porque a estrutura é muito complexa, sendo necessário lidar com uma grande quantidade de informação. Os alunos, geralmente, revelam alguma falta de experiência e acabam por utilizar apenas uma das representações (Dreyfus, 1994).

As funções são um exemplo claro dessa limitação. Trata-se de um conceito abstrato no qual usualmente trabalhamos com uma das representações ou com diferentes representações ao mesmo tempo, sendo mais frequentemente utilizadas a representação algébrica e gráfica Dreyfus (1994). A forma algébrica ainda tem um peso muito grande nos currículos, mas a interpretação gráfica de funções tem cada vez mais um papel considerável, pois características como a taxa de variação, crescimento, decrescimento, máximo e mínimo, continuidade ou descontinuidade são facilmente identificáveis na representação gráfica. Por seu turno, a forma tabular funciona muitas vezes como uma ponte entre as formas algébrica e gráfica.

Borba (1993; citado por Domingos, 1994) refere que a existência de pontos discretos é uma forma de facilitar a compreensão dos alunos acerca da transformação de funções e sugere que a utilização de pontos discretos é uma ferramenta muito importante para estabelecer a ligação entre os gráficos e as tabelas e, um pouco menos importante, entre as tabelas e a álgebra.

Mundy e Lauten (1993; citados por Domingos, 1994) identificam seis modos diferentes de representar funções: fenómenos reais, regra verbal, diagrama, tabela, gráfico e fórmula.

Verstappen (1982; citado por Kieran; citados por Domingos, 1994) define três categorias de representar relações funcionais em linguagem matemática: geométrica (esquemas, diagramas, histogramas, gráficos, esboços), aritmética (números, tabelas, pares ordenados), algébrica (símbolos literais, fórmulas).

Os processos de aprendizagem que envolvem as relações entre as representações e a sua abstração podem basear-se em quatro estados: usar uma representação simples, usar mais do que uma representação em paralelo, fazer ligações entre representações paralelas e integrar representações e ligações flexíveis entre elas (Dreyfus,1994).

O ensino da Matemática deve começar pela experiência dos alunos, sendo necessário usar uma variedade de representações e destacar as contribuições específicas das representações (Weigand,1993; citado por Domingos, 1994). Mas isto só acontece se os professores e os alunos tiverem um conhecimento sistemático, seguro e psicologicamente válido acerca das representações" (Kaput, 1987; citado por Weigand, 1993; citado por Domingos, 1994).

Quando o conceito não tem aspectos gráficos poderosos, as imagens incluem principalmente representações simbólicas ou fórmulas assim como o conjunto de todas as propriedades associadas com o conceito (Vinner e Dreyfus, 1989; citados por Domingos, 1994).

O processo que está intimamente relacionado com a ligação de representações é a tradução, referindo-se ao processo que envolve a transformação de uma representação da função noutra representação da mesma função. A tradução entre as diferentes representações de funções parece ser uma forma de abordagem que permite uma melhor compreensão destas.

Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990; citados por Domingos, 1994) consideram que a tradução envolve três processos principais: reconhecer a mesma função nas diferentes formas de representação; identificar, para uma transformação específica de uma função numa representação, a sua transformação correspondente noutra representação e construir uma representação de uma função dada outra.

Para Kreimer e Taizi (1983; citados por Domingos, 1994) a comparação e a tradução entre as representações algébrica e gráfica de várias funções é importante porque representa um método independente do cálculo para tratar funções, adequado a alunos mais novos, educando-os a serem flexíveis na utilização de diferentes representações de um mesmo conceito matemático.

A passagem da representação gráfica para a representação analítica é considerada a tarefa mais difícil uma vez que, envolve a detecção de padrões, enquanto traçar o gráfico de uma função, a partir da sua expressão analítica, envolve uma série de passos diretos, em geral, definir pares ordenados, representá-los no plano cartesiano e uni-los por uma linha (Leinhardt, Zaslavsky e Stein 1990; citados por Domingos, 1994)

Markovits, Eylon e Bruckeimer (1986) a partir dum questionário conduzido junto de cerca de 400 alunos do 9º grau, chegaram às seguintes conclusões:

- Há três tipos de funções que causam dificuldades: a função constante, as funções definidas por ramos e as funções definidas por um conjunto discreto de pontos.
- Quer na forma gráfica, quer na forma algébrica, o conceito e a representação de objetos e imagens só é parcialmente compreendido.
- A variedade de exemplos que os alunos utilizam refere-se, essencialmente, à forma gráfica e à algébrica, mas sobretudo a última.
- A passagem da forma gráfica para a algébrica é mais difícil do que a passagem da algébrica para a gráfica e ambas são condicionadas pela variedade de exemplos que os alunos conhecem.

- A "complexidade" de manipulações técnicas inibe o sucesso.
- Quando se pedem exemplos de funções, há uma certa tendência para a linearidade.

Uma das primeiras condições para a compreensão das funções está relacionada com a existência do mundo que nos rodeia (Sierpinska, 1992; citado por Domingos, 1994). As aplicações do mundo real vão criar, nos alunos, uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos abstratos podendo incrementar a motivação (Leinhardt, Zaslavsky e Stein, 1990; citados por Domingos, 1994).

Podemos, assim, concluir que segundo Anna Sfard (1991) os conceitos matemáticos podem ser concebidos segundo uma concepção operacional ou segundo uma concepção estrutural, sendo que a abordagem operacional deverá preceder a estrutural uma vez que esta última, muito mais abstrata, não tem muitas hipóteses de motivar e poderá mesmo nem ocorrer. A aprendizagem consistirá numa interação entre estas duas abordagens e a transição entre elas realiza-se em três etapas: interiorização, condensação e reificação (concretização). A reificação acontece quando se consegue identificar uma entidade matemática que é completamente nova como um objeto com significado próprio, autónomo e completo.

Do mesmo modo, concluímos que Shlomo Vinner (1994) distingue entre a definição abstrata de um conceito patente numa teoria matemática e o conceito imagem concebido na mente pelo indivíduo. Adquirir um conceito significa formar um conceito imagem para si, sendo o pensamento guiado pelo conceito imagem e não pelo conceito definição. As definições podem ajudar a formar um conceito imagem, mas no momento em que a imagem é formada, a definição pode tornar-se dispensável. Num estádio mais avançado das tarefas matemáticas, os alunos devem ir além do conceito imagem e usar as definições como um critério final para analisar conflitos entre os dois conceitos.

Compreender um conceito está relacionado com a forma como se interpretam as suas diferentes representações e a relação entre elas, passando de uma visão mais limitada para outra mais abrangente, pois a correta articulação entre as diversas representações permite confirmar e corrigir raciocínios. O processo que está intimamente relacionado com a ligação entre representações é a tradução, referindo-se ao processo que envolve a transformação de uma representação noutra representação.

Em suma, seja qual for a teoria, os conceitos matemáticos começam por ser abordados da forma mais simples e espontânea e só evoluem, se evoluírem, para outros estádios quando confrontados com outras abordagens mais abstratas que permitam confirmar e corrigir esses conceitos. Essencial para a compreensão de um conceito é o grau de interpretação das suas diferentes representações e de agilidade com que se passa de uma para as outras.

Capítulo 3. Metodologia

Neste capítulo pretende-se caracterizar a abordagem qualitativa como metodologia de investigação escolhida e as técnicas de recolha de dados. Passa-se depois para a aplicação dessa metodologia ao estudo em questão, descrevendo o contexto em que foi efetuada a recolha, os processos utilizados e os participantes no estudo.

3.1. Abordagem qualitativa

A metodologia escolhida para a realização deste trabalho de investigação baseia-se numa abordagem qualitativa. Uma abordagem qualitativa implica um forte envolvimento do investigador, uma convivência íntima com locais, situações, investigados, a leitura de dados perceptíveis e quase imperceptíveis, a descrição detalhada e uma interpretação cuidadosa dos dados recolhidos.

A abordagem qualitativa surgiu, segundo Bogdan e Biklen (1994), no final do século XIX início do século XX, tornando-se mais reconhecida a partir dos anos 60 e 70. De acordo com estes autores, há cinco aspectos a ter em conta na investigação qualitativa:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Assim, para que as ações possam ser melhor apreendidas, os investigadores integram-se nos locais de estudo e observam-nas no seu ambiente de ocorrência, sendo que os locais não se desligam no contexto das instituições a que pertencem. Os investigadores não se podem ainda esquecer que o comportamento humano é claramente influenciado pelo contexto em que ocorre.

2. A investigação qualitativa é descritiva. Os dados são recolhidos em forma de palavras ou imagens, incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias,…Os investigadores são minuciosos, não reduzindo as muitas páginas que contêm narrativas e os dados são analisados tentando respeitar tanto quanto o possível, o modo como foram registados. A palavra escrita assume particular importância, tanto no registo de dados como na sua disseminação. Nada é considerado como um dado adquirido e nada escapa à avaliação; nada é trivial, tudo tem potencial para constituir uma pista que permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto em estudo.

3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. A ênfase no processo tem sido

particularmente útil na investigação educacional, ao ajudar a esclarecer a ideia de que o desempenho cognitivo dos alunos é afectado pelas expectativas dos professores (Rosenthal e Jacobson, 1968, citados por Bogdan e Bilken, 1994). Recorrendo a pré e pós-testes, as técnicas quantitativas conseguiram demonstrar que se verificam mudanças. Por seu lado, as estratégias qualitativas evidenciaram o modo como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diárias.

4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. A teoria é desenvolvida de "baixo para cima", isto é, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. Os dados não são recolhidos para confirmar hipóteses já construídas. É como um funil: de início tudo está em aberto, tudo se vai tornando mais fechado, a teoria só se começando a estabelecer após a recolha dos dados e o passar de tempo com os sujeitos.

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas, preocupam-se com aquilo que se designa por perspectivas participantes (Erickson, 1986; citado por Bogdan e Bilken, 1994), tentam compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Ao apreender as perspectivas dos participantes, a investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior. Os investigadores qualitativos fazem questão de se certificar de que estão a apreender as diferentes perspectivas adequadamente. Alguns mostram as gravações, as transcrições, os rascunhos aos participantes para se certificar que as suas perspectivas conferem com a dos sujeitos. O investigador é como um viajante que sai com destino mas sem marcações e não como aquele que planeia detalhadamente todos os pormenores de viagem. Enquanto a investigação quantitativa trabalha com dados numéricos, a investigação qualitativa trabalha com dados descritivos que lhe permitem transpor o modo de pensar dos participantes.

3.2. Recolha de dados

Para Tuckman (2000), as fontes de obtenção de dados que se empregam na investigação qualitativa são normalmente três: observação, entrevistas e documentos.

3.2.1. Observação

Observar atentamente para apreender o mais possível, sem influenciar o decorrer normal dos acontecimentos, sendo o produto registado em notas de campo. Para Tuckman (2000), esta observação pode, por vezes, ser uma tentativa de confirmar o resultado de outras recolhas de dados.

Com a observação conseguem-se captar normalmente reações espontâneas, autênticas no próprio momento em que ocorrem.

Consoante o envolvimento do investigador identificam-se normalmente dois tipos: observação direta (não participante) e observação participante. Na observação direta pressupõe-se a não envolvência do observador, isto é, não afecta nem interage com a situação. Muitas vezes, o investigador está anónimo e os observados não sabem que o são. Se por um lado, se minimiza o impacto que o investigador pode causar na unidade em estudo, por outro há certos detalhes que o distanciamento não permite obter. Na observação participante o investigador faz parte do contexto a observar, simplesmente assistindo ou mesmo agindo sobre a situação. O observador está mais perto da situação, pode retirar mais informação. Mas, por outro lado, a sua presença pode ser fonte de enviesamento e o observador pode também perder alguma objetividade na análise. Para Bogdan e Biklen (1994) a observação participante é a melhor técnica de recolha de dados neste tipo de estudos.

3.2.2. Entrevistas

Patton (1990) identifica três tipos de entrevistas abertas qualitativas: entrevista informal, entrevista com guião, entrevista aberta padronizada. Estas três abordagens diferem entre si pelo grau com que a redação e a sequência das questões que serão formuladas são determinadas e padronizadas antes da realização de entrevistas e com que as respostas dadas não se restringem às opções fornecidas pelo entrevistador. Existem ainda as entrevistas fechadas, com resposta fixa, que serão mais aplicadas em investigações quantitativas e estruturadas.

A entrevista informal poderá ocorrer durante um trabalho de campo, espontaneamente, para que o investigador recolha informação que no momento se lhe afigure como relevante e a pessoa “entrevistada” pode mesmo não se aperceber dessa situação (Patton, 1990). As questões são geradas pela interação entre o entrevistador e o entrevistado. Assim, é susceptível de produzir informações não antecipadas e de não abranger todas as questões importantes. Não sendo uma entrevista sistematizada, dificulta a análise dos dados.

No caso das entrevistas com guião, o entrevistador tem uma estrutura de tópicos que deverão ser abrangidos, mas pode variar a formulação e a ordem das perguntas. A grande vantagem é que os dados são um pouco mais sistemáticos e abrangentes do que na entrevista informal, enquanto o tom da entrevista continua a ser bastante informal. Uma possível desvantagem é poder impedir que outros temas importantes possam ser analisados, se o entrevistador não for suficientemente flexível para perceber que pode enriquecer o resultado da sua entrevista. Como é susceptível de produzir informação não antecipada, pode também ser difícil de analisar os dados.

Na entrevista aberta padronizada, não há nenhuma flexibilidade na formulação ou ordem das perguntas. Ainda é considerada uma entrevista qualitativa, porque as respostas são abertas. É útil para reduzir desvios quando há vários entrevistadores ou quando os entrevistadores são menos experientes, ou quando é importante ser capaz de comparar as respostas de entrevistados diferentes. O maior inconveniente é a pouca flexibilidade e o facto de não haver garantia de que as perguntas feitas sejam as mais relevantes nesse momento específico.

Nas entrevistas, devem evitar-se perguntas que permitam respostas “sim” e “não”, uma vez que a riqueza da resposta, os pormenores são revelados a partir de perguntas que exigem exploração (Bogdan e Biklen, 1994). É ainda importante ter presente que as entrevistas são processos que consistem no questionamento de sujeitos e não na observação dos seus comportamentos (Tuckman, 2000).

A construção de um plano de entrevista ou guião deve ser cuidadosa e as questões formuladas devem ter em conta o objetivo da investigação, devem ser especificados os aspectos sobre os quais se pretendem colher dados e escolher e organizar o formato das questões (Tuckman, 2000).

3.3. Procedimentos de Recolha de Dados

Depois de uma caracterização da abordagem qualitativa, a metodologia de investigação escolhida, e das técnicas de recolha de dados empregues, passa-se a descrever o contexto geral onde o estudo foi levado a cabo, onde e como decorreu a observação, que entrevistas foram efetuadas e quais os documentos recolhidos.

3.3.1. Contexto Geral

A investigação foi levada a cabo na Escola Secundária Fernando Lopes Graça, na Parede, durante o ano letivo de 2011-2012.

A recolha de dados ocorreu junto das turmas que a investigadora acompanhou durante o período de estágio pedagógico, em particular dos elementos da turma A. Foram escolhidos alguns alunos da turma sobre os quais incide o estudo mais em particular, numa gama que abarque um espectro relativamente alargado de competências. A observação menos estruturada dos elementos da turma B permitiu, por vezes, confirmar alguns dos dados levantados junto dos alunos da turma A. As turmas em questão encontram-se descritas no Relatório de Atividades que integra a primeira parte deste trabalho.

O levantamento mais exaustivo decorreu no início do 2º período, com especial enfoque durante duas das primeiras aulas lecionadas sobre o tema Funções Racionais. De qualquer forma, o estudo de Funções foi tema recorrente ao longo do ano, nomeadamente desde outubro, altura em que se estudaram as Funções Trigonométricas. Foi, assim, possível ir recolhendo dados ao longo de todo o período de estágio.

A investigadora lecionou os três primeiros blocos do tema Funções Racionais. As aulas decorreram maioritariamente em grande grupo, de uma forma expositiva, mas muito participadas pelos alunos, como é habitual. Nelas estiveram presentes todos os alunos da turma. As aulas foram áudio-gravadas, de modo a permitir recolher os dados com maior fiabilidade dado o duplo papel que assumia, como investigadora e como professora titular da turma. Estas aulas, em que se procedeu à gravação, foram aulas especificamente lecionadas para esse efeito, encontram-se sumariamente descritas no Relatório de Atividades e mais detalhadas neste documento.

As aulas subsequentes foram ministrados pela Orientadora Pedagógica e, neste caso, a investigadora pode observar segundo outra perspectiva. Nestas aulas procedeu-se, maioritariamente, à resolução de exercícios em pequenos grupos, com correção em grande grupo, para consolidação de conceitos.

3.3.2. Observação

Inserida na comunidade escolar de forma tão implicada quanto possível, o acompanhamento foi diário, a recolha de dados também. Seguiu de perto e participou ativamente nos procedimentos e interações diárias. Sem ideias pré-concebidas, tanto mais que a sua experiência de leccionar em ambiente de sala de aula era praticamente inexistente, foi construindo o estudo passo a passo.

No caso concreto desta investigação, durante a recolha de dados, a investigadora passou por diversos estádios e assumiu diferentes tipos de observação. No início do ano letivo, teve, como é natural, uma observação mais próxima do não participante e em que a sua presença produziria mais impacto. Com o passar do tempo e a sua presença sendo considerada natural, esse efeito foi-se diluindo.

Durante as aulas em grande grupo lecionadas pela Orientadora Pedagógica, a investigadora pode muitas vezes manter-se como observadora atenta sem interferir, quando se sentava na parte traseira da sala. No entanto, com o decorrer do ano letivo esses momentos eram cada vez mais entrecortados por solicitações de esclarecimento de dúvidas ou pela necessidade de acompanhamento de alunos com dificuldades em acompanhar a abordagem dos conteúdos. Por outro lado, sendo o modelo de aulas de participação ativa de todos os elementos (alunos, Orientadora Pedagógica e professora estagiária), a observação tornou-se também cada vez mais participativa.

Nas aulas de trabalho individual ou de pequeno grupo, normalmente para resolução de tarefas de consolidação de conhecimentos, a investigadora circulava observando, respondendo a solicitações dos alunos ou colocando questões a propósito dos assuntos em estudo e a confiança que os alunos em si depositavam permitiu obter dos mesmos as suas perspectivas genuínas.

O facto de estar em sala de aula, completamente integrada no dia-a-dia da turma, permitiu-lhe ter uma visão global e pormenorizada do desenvolvimento dos conteúdos ao longo do ano, observar as situações em cada momento e ter uma visão mais detalhada e concreta das perspectivas e aprendizagens dos alunos. A sua presença sendo diária e já considerada natural reduziu os riscos de enviesamento. Por outro lado, essa partilha quotidiana poderá ter induzido alguma perda de objetividade.

Muito importante na recolha de dados por observação foi a sistemática discussão pós-aula que era mantida entre a Orientadora Pedagógica e a investigadora e que auxiliava no sentido de confirmar, ou não, as inferências deduzidas pela segunda.

3.3.3. Entrevistas

Durante o período em que foi lecionado o tema Funções Racionais, em janeiro de 2012, não foram conduzidas entrevistas de modo estruturado e individualizado, para que os alunos não sentissem que estavam a ser analisados e tivessem um comportamento pouco natural. No entanto, a investigadora procurou sempre recolher elementos resultantes de conversas informais em sala de aula.

Mais tarde, considerou-se relevante conduzir entrevistas mais estruturadas, apoiadas num guião. Estas entrevistas foram realizadas propositadamente algum tempo depois das aulas lecionadas sobre o tema, para aferir a consolidação efetiva dos conhecimentos em estudo, uma vez que os mesmos eram solicitados nas diversas avaliações sumativas.

A primeira entrevista decorreu durante um bloco de 90 minutos dedicada à disciplina de Matemática, em que os elementos foram sendo chamados um a um, para resposta a algumas questões, sendo-lhes depois pedido que realizassem alguns exercícios.

Na segunda entrevista, que ocorreu poucos dias depois, também durante um tempo letivo da aula de Matemática, os entrevistados foram confrontados com o que havia sido transcrito na primeira entrevista, tendo-lhes sido dada a possibilidade de confirmar e/ou corrigir os raciocínios. Esta entrevista serviu para completar o que não fora possível concluir no primeiro dia.

Enquanto foram colocadas questões, tentou-se que os alunos, antes de responderem, não ouvissem as respostas dos outros, por forma a evitar o condicionamento do seu raciocínio.

Os alunos mostraram-se colaborantes e outros houve que gostariam de ter sido incluídos nesta amostra. De qualquer forma, não foi possível efetuar mais nenhuma entrevista, dada a falta de disponibilidade demonstrada pelos alunos para a sua realização fora do horário letivo e porque a ocorrência de mais entrevistas em tempos letivos poderia ser prejudicial por necessitarem de faltar a aulas em que se lecionavam conteúdos programáticos.

Nas entrevistas pretendeu-se que os alunos repensassem o conceito função e falassem sobre o mesmo, identificassem representações e evidenciassem a agilidade com que passavam de umas para outras.

O guião foi elaborado tendo sempre presente os objetivos do estudo, sendo algumas questões similares às que já tinham sido colocadas em contexto de sala de aula, outras sendo apresentadas de forma diferente, se bem que correspondendo a conteúdos já abordados. Pretendia-se que o guião fosse, isso mesmo, um guia com o objetivo de orientar a investigadora, não limitativo das questões a colocar. Porém, a falta de tempo não permitiu ir muito além do que aí estava definido.

Durante as entrevistas, a investigadora tentou nunca interferir nos raciocínios dos alunos. Porém, no final, algumas das questões foram discutidas e as dúvidas esclarecidas.

3.3.4. Documentos

Foram recolhidos essencialmente documentos realizados nas seguintes situações: trabalhos de casa, trabalhos realizados em sala de aula, testes de avaliação sumativa e tarefas realizadas durante as entrevistas.

Em qualquer dos casos, foram tomadas em consideração as questões relacionadas com o tema em estudo.

Alguns dos trabalhos realizados em sala de aula e em casa foram desenhados para o estudo em questão e pretendiam ser o reflexo de um trabalho individual mais autónomo que permitisse aferir o grau de aquisição de conteúdos.

3.4. Participantes no estudo

Dada a dificuldade temporal e logística para analisar detalhadamente o trabalho desenvolvido por todos, escolheu-se uma amostra de quatro alunos que se considerou representativa da turma, sendo cada um dos elementos considerado como pertencente a um estádio diferente de compreensão dos conceitos matemáticos. A opção foi feita com base nas características distintas dos elementos, a sua participação em sala de aula, o seu desempenho nas avaliações sumativas, bem como a sua disponibilidade para poder participar nas entrevistas.

Esta escolha foi realizada em conjunto com a Orientadora Pedagógica tendo em conta o conhecimento que ambas têm da turma.

Os alunos escolhidos anuíram prontamente a participar no estudo. Porém, só foram informados na altura na entrevista, já depois de terem sido feitas as observações em sala de aula, numa tentativa de não influenciar os dados recolhidos. Os nomes utilizados são fictícios, por forma a preservar o seu anonimato.

O Lourenço é um aluno participativo que, embora manifeste alguma dificuldade na manipulação de conceitos base, tem vindo a fazer um esforço razoável por acompanhar os conteúdos em sala de aula. No 2º período, após reunião com a Encarregada de Educação, ficou decidido que a investigadora o iria acompanhar mais de perto, sentando-se ao pé dele na maioria das aulas. Este facto terá tido repercussões positivas, tendo conseguido elevar as suas avaliações sumativas. Entretanto, continuou a solicitar muitas vezes a presença da investigadora. Dentro de cada conteúdo, vai tentando realizar as tarefas propostas em sala de aula, demonstrando dificuldades acrescidas naquelas que se apresentam como novas situações.

Apesar de se notar que costuma fazer os trabalhos de casa, não deve efetuar mais trabalho autónomo, muito necessário, em especial no seu caso. Não recorre a explicador e só muito pontualmente frequentou a sala de estudo.

É um aluno cujas notas na disciplina de Matemática nos três períodos foram, respetivamente, 9, 10 e 10, abaixo da média da turma que foi de 12, 13, 13.

É um aluno educado e muito prestável, que normalmente auxilia na utilização dos computadores. Foi também ele o criador do grupo fechado da turma no *Facebook*, o "Cantinho da Matemática", por solicitação da investigadora.

O Miguel é um aluno participativo, com uma forma muito própria de estar, que se distrai com muita facilidade. Daí, sentar-se, por vontade própria, na primeira fila todo o ano. É talvez o aluno que mais ostensivamente não usa o caderno, ficando muitas vezes grande parte da aula agarrado à mochila (com o caderno lá dentro).

Tem uma grande facilidade de visualizar no espaço e gosta de explicar aos colegas os assuntos em que se sente à vontade. Aprecia a utilização da calculadora e faz arredondamentos constantes, mesmo nos exercícios em que são pedidos valores exatos. Tem formas de resolver os exercícios muito próprias, mas que nem sempre são as mais simples. Num teste, é capaz de ficar preso a uma questão, esquecendo-se que tem outras para resolver.

Raramente efetua os trabalhos de casa e deve realizar muito pouco trabalho autónomo. As únicas tarefas fora da sala de aula devem limitar-se àquelas que efetua nas explicações que frequenta semanalmente. Terá participado na sala de estudo uma ou duas vezes no ano.

Denota muito boas capacidades, mas mercê da sua falta de trabalho em sala de aula e em casa, é francamente prejudicado na sua avaliação. As suas classificações a Matemática este ano foram: 10, 13, 12.

É um aluno educado, com boa formação, mas algo imaturo, talvez por isso apresente algumas dificuldades de aceitação pela generalidade dos colegas da turma.

A Neusa é uma aluna do quadro de excelência, com classificações a Matemática este ano de 16, 18 e 19, muito participativa em sala de aula, com raciocínios muito próprios, boa facilidade de comunicação, bons encadeamentos lógicos, boa exposição escrita e oral, trabalhadora, organizada, com bom nível de maturidade e de consciência social. Nas aulas gosta que a docente lhe dê tempo para realizar as tarefas individualmente, antes de as realizar em grande grupo. Executa todas as tarefas propostas e é muitas vezes a última a acabar. É a aluna que apresenta as respostas mais completas e estruturadas.

É a frequentadora mais assídua da sala de estudo, na qual já chegou a estar sozinha com a docente.

O Tiago tem um raciocínio muito próprio e perspicaz, muito participativo em sala de aula, às vezes talvez em demasia, impulsivo, extrovertido, falador. Chega a colocar uma pergunta e dar de imediato a resposta a si próprio, sem esperar que outros o façam.

Muitas vezes não resolve os exercícios em sala de aula, ficando a conversar e a incomodar outros que o poderiam fazer. Tem dificuldades de concentração e gosta de falar de um lado para o outro da sala. Recorre a explicador na disciplina de Matemática e só pontualmente frequentou a sala de estudo. Para além disso, apesar de afirmar o contrário, não evidencia grande trabalho em casa.

É pouco organizado e pouco trabalhador, o que o prejudica francamente no aproveitamento. Podendo ser um aluno com muito boa avaliação, ficou aquém do que poderia conseguir, com 12, 14 e 15 a Matemática este ano nos três períodos.

A nível de maturidade, por vezes, tem atitudes pouco adequadas, mas permite facilmente ser abordado para as discutir. Precisa de melhorar o seu grau de consciência social.

Capítulo 4. Levantamento e análise de dados em contexto educativo

No presente capítulo, é feito o levantamento e a análise passo-a-passo dos dados recolhidos. Este levantamento ocorreu maioritariamente em três fases distintas, se bem que as duas últimas se revelem mais ricas em dados. Começa com uma primeira abordagem ao tema Funções, que ocorreu no primeiro período, um conjunto de aulas sobre o tema Funções Racionais, no início do segundo período e um conjunto de entrevistas, no final do terceiro período, nas quais se recolheram dados de participação em sala de aula, de fichas de trabalho, de conversas, de testes de avaliação. Todos os outros momentos foram também ricos em material e, se bem não explicitados, serviram muitas vezes para consolidar pontos de vista.

Ao longo deste trabalho, por questões de brevidade de escrita, sempre que nos referimos a funções estamos a considerar funções reais de variável real definidas no seu domínio.

4.1. Observação em sala de aula

4.1.1. Primeira abordagem ao tema Funções
Outubro de 2011

A primeira abordagem ao estudo das funções no presente ano letivo ocorreu em outubro, com as Funções Trigonométricas. Aí, foi revisitado o tema Funções já tratado no 10º ano, aplicado agora ao estudo das Funções Trigonométricas.

Começando com a função f definida por $f(x) = sen\ x$ foi feito um estudo no que diz respeito a domínio, contradomínio, expressões gerais dos zeros, dos maximizantes e dos minimizantes, paridade, injetividade, monotonia, continuidade, sinal e periodicidade. Durante este processo, a Orientadora Pedagógica conduziu o estudo, solicitando a contribuição dos alunos, um a um, seguindo a ordem por que estavam sentados. Seguiu-se o estudo da função f definida por $f(x) = \cos x$, para a qual foram analisadas as mesmas características, sendo que, neste caso, os alunos contribuíram de uma forma mais consolidada. Todo este estudo foi apoiado na visualização das funções na calculadora gráfica.

No dia seguinte, passou-se ao estudo da função f definida por $f(x) = tg\ x$. A primeira dificuldade que os alunos enfrentaram prendeu-se com a definição do domínio, pois havia valores de x para os quais a "função não existia". Nesses pontos, muitas calculadoras exibem traços verticais, que não fazem parte do traçado gráfico (caso contrário, não estaríamos perante o gráfico de uma função). Os alunos foram alertados para essa limitação da tecnologia gráfica.

Sumariamente e por comparação com o que havia sido estudado com as Funções Polinomiais no ano letivo anterior, foi feito um estudo no que respeita às transformações dos gráficos de Funções Trigonométricas.

As aulas decorreram bem e foram bastante participadas pelos alunos. Alguns alunos conseguiram compreender a aplicação das funções seno e cosseno a situações da vida real. A visualização da representação gráfica foi muito utilizada e essencial no estudo das Funções Trigonométricas e das suas transformações. Os conceitos estudados no 10º ano foram relembrados com relativa facilidade, provando-se na maioria das vezes estar bem interiorizados. As novas matérias foram sendo apreendidas com algumas objeções porque os alunos tiveram dificuldade em compreender qual era realmente a variável numa Função Trigonométrica.

Tanto o Miguel, como a Neusa, como o Tiago foram dos alunos que participaram mais ativamente nestas aulas, evocando e aplicando o estudo das características de uma função explorado no 10º ano às Funções Trigonométricas, participando quer por solicitação da Orientadora Pedagógica quer espontaneamente. O Lourenço limitou-se à participação a pedido e evidenciou que os conteúdos necessitavam de ser trabalhados e consolidados.

4.1.2. Primeiro bloco de aulas lecionadas sobre Funções Racionais Janeiro de 2012

Após o habitual burburinho e "atraso" constante de certos alunos, a aula inicia-se com a recolha da resolução da ficha de trabalho 19A (Anexo 1) que tinha ido para trabalho de casa. Dos 22 alunos, 12 apresentaram essa resolução. Dos restantes, apenas um aluno acabou por entregar um dia mais tarde.

De seguida, introduz-se a definição de Função Racional. A investigadora questiona os alunos sobre o que é um polinómio, ao que Tiago refere "$b^2 - 4ac$", mas prontamente diz

"Esqueça." Uma certa confusão entre polinómio e binómio discriminante. Para Neusa, polinómio são "números com letras". Relembra-se o que é um polinómio e faz-se uma brevíssima introdução sobre Funções Racionais. As Funções Racionais representam um quociente entre dois polinómios. À questão "o polinómio denominador não pode ser igual a quê?", Nelson responde "a zero".

Entrega-se a ficha de trabalho 20A (Anexo 2) para que os alunos estudem individualmente a função f definida por $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. A Orientadora Pedagógica, bem como a investigadora, circulam esclarecendo dúvidas pontuais, sendo que o objetivo era entender como os alunos procediam para analisar a referida função.

À partida, a maior dificuldade manifestada pelos alunos parece ter sido o domínio da função, uma vez que sabiam que o denominador não podia ser igual a zero, mas não conseguiam traduzir esta afirmação em linguagem matemática.

> Miguel: Oh *stôra*, enganou-me. Esta não é uma função. Não consigo descobrir o domínio.
>
> Investigadora: Já introduziu a função na calculadora? Olhe bem para o gráfico.
>
> Miguel: Mas eu não tenho valores. Como é que eu consigo?
>
> Constança: Eu nem sei ver o domínio.
>
> Miguel: Eu não consigo perceber nem o domínio nem o contradomínio.
>
> I: A que dissemos que o denominador não podia ser igual?
>
> Miguel: Zero.
>
> I: O que está em denominador?
>
> Miguel: x.
>
> I: Então que valores não pode x tomar?
>
> Miguel: Zero.
>
> I: Se o gráfico não intersecta o eixo dos yy, quer dizer que nunca tem que valor? Então, o que há-de ser? Tudo menos… qualquer coisa.
>
> Íris: Então é IR exceto zero.
>
> I: E agora… que valores é que y nunca toma?
>
> Íris: Zero.
>
> I: Porquê?
>
> Íris: Porque para ser zero, o numerador tinha de ser zero. E é um.
>
> I: Então já sabem definir o contradomínio?
>
> Miguel: IR exceto zero.

Depois de entendido o domínio, que, neste caso, é diferente do que os alunos estavam habituados (IR), já foi mais evidente definir o contradomínio, bem como obter uma representação gráfica da função.

> Nelson: "*Stôra* como é que eu faço o gráfico da função?"

I: [O Nelson não está a usar a calculadora]. Então diga-me o que sabe sobre esta função.

Nelson: Que x nunca pode ser zero. E que o y nunca é zero. Não cruza os eixos.

I: Nunca intersecta os eixos dos xx nem dos yy. E agora… quando o valor de x é positivo o que acontece ao valor de y?

Nelson: É… positivo.

I: E quando o valor de x é negativo o que acontece ao valor de y?

Nelson: É negativo.

I: E o que é que isso lhe diz?

Nelson: Que só está aqui [aponta para o primeiro quadrante] e aqui [aponta para o terceiro quadrante]. Agora vou dar valores…

Achando três ou quatro pontos para cada quadrante, Nelson acabou por conseguir desenhar o gráfico da função, sem utilizar a calculadora.

Para o estudo da paridade, a maioria dos alunos recorre à representação gráfica e indica a simetria em relação ao eixo dos yy (se for simétrico, é par) e em relação à origem do referencial (se for simétrico é ímpar). Poucos são os alunos que ainda pensam que tem de ser obrigatoriamente uma das duas, isto é, se uma função não for par, é ímpar. Já o estudo da paridade de uma função através da expressão analítica é evitada, excepto por Constança, que explica a um colega "Tens de pôr $f(x) = -f(x)$".

O estudo desta função continuou, suscitando alguma confusão e prolongou-se por bastante tempo (mais de 15 minutos). Neusa foi a última a entregar a ficha.

Em grande grupo, iniciou-se a correção da ficha de trabalho 20A (Anexo 2). A aula é bastante participada pelos alunos, aliás como é usual com esta turma. A investigadora incentiva à participação, interrogando constantemente os alunos. Os resultados são construídos pelos mesmos, tanto quando questionados um a um, como por colaboração espontânea. O uso de métodos visuais com recurso à calculadora gráfica e ao programa *TI-Nspire* tem como objetivo agilizar e auxiliar a aprendizagem na medida em que facilita a compreensão do estudo e das características das funções.

Quando inquiridos sobre que representações conhecem para as funções, os alunos referem a gráfica e a analítica. Quanto à representação tabelar ninguém recorreu a ela para esta tarefa. Também não mencionam outra forma de representar funções. A este propósito, a Orientadora Pedagógica referiu que no tempo em que estudou funções, primeiro definia-se "domínio, contradomínio, zeros, monotonia, paridade, continuidade e a última alínea era a representação gráfica. E porquê? Porque nessa altura os alunos não tinham calculadora gráfica à mão". A realidade agora é outra e como se viu, neste caso, quase todos os alunos se apoiaram na calculadora gráfica para fazerem o estudo da função e puderam confirmar visualmente que a função não toma valores para $x = 0$.

Com a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, escrita no quadro, questiona-se sobre o que falta indicar e o que isso significa relativamente ao domínio.

> I: Logo à partida o que me falta aqui escrever?
>
> Tiago: x diferente de zero” [outros alunos confirmam a resposta].
>
> I: E o que isto nos leva a dizer sobre o domínio?
>
> Alunos: IR excepto zero.

Depois analisa-se o contradomínio, neste caso, igual ao domínio, o que de início pareceu provocar alguma confusão. “Neste caso, o contradomínio é igual ao domínio, mas nós não vamos encontrar isto sempre. Temos que ter cuidado”, alerta a investigadora.

Entretanto, projeta-se no quadro a função com o auxílio do programa *TI-Nspire*, para permitir uma mais fácil análise em conjunto. Com a orientação da investigadora orienta, passa-se ao estudo da injetividade: Aqui um dos alunos começa por lembrar a definição, mas logo outros se vão apoiar na visualização gráfica.

> I: E quanto à injetividade? Quem se lembra o que é uma função injetiva?
>
> Alexandre: Quando um objeto corresponde a uma e uma só imagem.
>
> I: Ou seja, quando temos um valor de x_1 diferente de x_2, o que acontece ao valor de $f(x_1)$ e ao valor de $f(x_2)$? Qual a relação entre eles?
>
> Alexandre: São diferentes.
>
> Madalena: Traçam-se paralelas ao eixo dos xx ou ao eixo dos yy?
>
> I: As paralelas ao eixo dos yy serviam para ver o quê?
>
> Tiago (e outros alunos): Para verificar se (uma correspondência) era função ou não.
>
> Paulo: Então… podemos traçar paralelas ao eixo dos xx para ver se a função é injetiva.
>
> I: Para ver se uma correspondência é função ou não usávamos no 10º ano e antes o teste… da recta vertical. Para ver se uma função é injetiva usamos o teste … da recta horizontal. (A função) É injetiva ou não?
>
> Alunos: É.
>
> I: Vejam… quando x_1 diferente de x_2, $f(x_1)$ diferente de $f(x_2)$. Como chegaram a essa conclusão?
>
> Alunos: Com a recta (horizontal).

Continuando, a investigadora solicita outra caraterística para ser examinada. Neste caso, vão ser os zeros da função. Os zeros da função não levantaram problema e foram visualmente evidentes.

> Lourenço: Não tem zeros.
>
> I: O que tinha então de acontecer para a função ter zeros?
>
> Ricardo: y igual a zero.
>
> I: Ou seja, $f(x)$ tinha de ser igual a zero, neste caso, $\frac{1}{x}$ tinha de ser igual a zero. A determinação dos zeros da função f consiste em resolver a equação $f(x)=0$.

Continuando na demanda de outras características, Alexandre e outros alunos sugerem a monotonia. Para o intervalo do domínio em que x toma valores positivos, não parece haver dúvidas, o que já não acontece para o intervalo do domínio em que x toma valores negativos. Neste caso, foi essencial a visualização gráfica, pois os alunos evidenciaram algum embaraço em comparar números fracionários negativos.

> I: Vamos lá Frederico…
>
> Frederico: É decrescente.
>
> I: Mas atenção; temos de ter cuidado. Vamos pensar no domínio. x não toma o valor zero…Vamos analisar para cada intervalo do domínio separadamente. Aqui [apontando para o primeiro quadrante], em que o valor de x é positivo? (A função) É crescente ou decrescente?
>
> Alunos: É decrescente.
>
> I: Como vemos?
>
> Tiago: (A função) começa num valor mais alto e vai decrescendo.
>
> I: Ou seja, à medida que x aumenta, $f(x)$…?
>
> Alunos: Diminui.
>
> I: E agora para valores de x menores do que zero?
>
> (algum burburinho)
>
> I: Vamos ver com um exemplo, se bem que um exemplo não nos garante extrapolar. Calculemos para $f(-3)$ e $f(-4)$ [escrevendo no quadro]… Qual a relação entre $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{4}$?… O que acontece?... Os sinais negativos baralham-vos?
>
> Alunos: Sim.
>
> I: Conseguem ver na recta real [e vai desenhando a recta]? Qual está mais próximo de zero? $-\frac{1}{3}$ ou $-\frac{1}{4}$?
>
> Alunos:… [vacilando] $-\frac{1}{4}$…

I: Então qual é mais pequeno?

Alunos: $-\frac{1}{3}\ldots$

I: É mais simples ver graficamente…?

Tiago: É mais simples.

I: É fácil perceber graficamente. Então [percorrendo com a mão no intervalo em que x toma valores negativos]. Quando aumentamos o valor de x, o valor de $f(x)\ldots$?

Alunos: Diminui.

I: Neste intervalo, a função f é decrescente. E agora vamos pensar o que acontece para valores de x positivos. Aqui é mais fácil [percorrendo com a mão a curva no intervalo em que x toma valores positivos], não é? Qual a relação entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$? Quando x está a aumentar, $f(x)$ está a diminuir. A função f é aqui…?

Alunos: Decrescente.

Para ajudar a reconhecer se a função é crescente ou estritamente crescente, a investigadora apelou à memória, mas acabou por ter de desenhar no quadro duas funções, uma delas definida por ramos e só depois escrever a definição.

I: Ricardo lembra-se da diferença?

Ricardo: Eu acho que decrescentes eram aquelas em que havia interrupções.

I: [Desenhando uma função do tipo $y = ax + b$ e uma função definida por ramos do tipo $\begin{cases} y = x, & x < 0 \\ y = k, & x \geq 0 \end{cases}$] Lembram-se destas funções? Esta função é crescente ou estritamente crescente? E esta?

OP: Para ser crescente ou decrescente em sentido lato, o que tinha de acontecer? Os valores de x estavam a aumentar e os valores de y mantinham-se…

Alunos: Constantes.

I: A função diz-se crescente se para todos os pontos do domínio quando para [escrevendo no quadro] $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) \leq f(x_2)$. Será estritamente crescente quando para $x_1 < x_2$ se tem…?

Alunos: $f(x)$ sempre a aumentar.

I: [continua a escrever no quadro]… Se tem $f(x_1) < f(x_2)$.

Coloca-se agora a questão de como descrever em linguagem matemática a monotonia da função. Os alunos sugerem que se escreva que a função é estritamente decrescente em $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Mas não poderá ser assim e a investigadora e a

Orientadora Pedagógica vão recorrer a exemplos, desenhando no quadro funções definidas por ramos, para procurar explicar o que se afigura complicado para os alunos.

I: Vamos ver com um exemplo que se calhar é mais simples. Se $x_1 = -3$ e $x_2 = 4$, temos que $f(x_1) = -\frac{1}{3}$ e $f(x_2) = \frac{1}{4}$. Neste caso, $x_1 < x_2$. Qual é maior? $f(x_1)$ ou $f(x_2)$?

Alunos: $f(x_2)$.

I: Tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. A função seria crescente e nós chegámos à conclusão que no domínio dela era estritamente decrescente [aponta para o ramo em que $x < 0$] e estritamente decrescente [aponta para o ramo em que $x > 0$]. Parece uma contradição.

Ricardo: São coisas diferentes.

I: Mas como se escreve?

Ricardo: E em...

Constança: Porque não pode ser união?

I: Para se colocar união teria de se verificar ser decrescente entre quaisquer dois pontos, independentemente de pertencerem ou não ao mesmo ramo. O que acontece para $x_1 = -3$ e $x_2 = 4$, repete-se também, por exemplo, para $x_1 = -7$ e $x_2 = 2$. Na realidade temos de escrever decrescente em … e em… como o Ricardo sugeriu.

Neusa: Nós não podíamos escrever que era estritamente decrescente em IR para todo o x pertencente ao domínio de IR? (também Alda tem a mesma dúvida.)

I: Mas na realidade, dizer assim ou dizer união é a mesma coisa.

OP: Vejam esta função [enquanto desenha no quadro a função definida por ramos $\begin{cases} y = x & se\ 0 \le x < 2 \\ y = -x + 6 & se\ 2 \le x < 3 \\ y = x & se\ x \ge 3 \end{cases}$] como se pode descrever a monotonia desta função?

Alunos: Estritamente crescente em $[0,2]$ e em $[3,+\infty[$ e estritamente decrescente em $[2,3]$.

OP: E porque não coloca união entre $[0,2]$ e $[3,+\infty[$? Porque entre esses intervalos a função não era crescente. Há vários manuais que têm isto errado (colocam sinal de união).

Miguel: Mas alguns dos intervalos não deviam ser abertos?

OP: Quem responde a esta questão do Miguel?

Ricardo: Está certo assim.

OP: E está certo, porquê? … Porque não se estuda a monotonia de uma função num ponto. E cuidado que também há muitas gralhas em manuais sobre este assunto.

No meio do estudo da monotonia surgiu ainda uma dúvida relacionada com os sinais de $\cup$ $\cap$ $\vee$ $\wedge$, pois continua a não ser claro quando usar uns ou outros, sendo que alguns alunos esclarecem que entre conjuntos se usam os sinais de reunião e intersecção.

Estudada a monotonia da função, a investigadora pede aos alunos que indiquem o que há mais para estudar e a escolha recai sobre a paridade. Mais uma vez aqui se atenta no gráfico da função.

> I: Ana diga-me...
>
> Ana: A função é ímpar.
>
> I: Porque que é que a função é ímpar, Miguel?
>
> Miguel: É simétrica em relação à origem.
>
> I: Se fosse par, como teria de ser o gráfico da função?
>
> Alunos: Simétrico em relação ao eixo dos yy.
>
> I: Diga Catarina como fez em notação matemática. Se a função é ímpar…
>
> Constança: $-f(x)=f(-x)$.
>
> I: E para uma função par?
>
> Constança: … $f(x)=f(-x)$.
>
> I: O que terá de acontecer para todos os valores do domínio da função.

Continuando, a Neusa e outros alunos sugerem que se estude o sinal da função. Aqui não parece haver grande problema e quer recorrendo ao gráfico da função, quer à expressão analítica, os alunos não têm dúvidas que $f(x)<0$ quando $x<0$ e $f(x)>0$ quando $x>0$.

Passando à continuidade, surgem de novo as incertezas e é preciso apoiar a explicação numa das funções definidas por ramos desenhadas anteriormente no quadro. Não é evidente para os alunos que a função é contínua no seu domínio, porque há uma interrupção no desenho do gráfico.

> I: A função é contínua?
>
> Íris: Sim.
>
> I: E porquê?
>
> Íris: Porque…
>
> I: Nos manuais refere-se frequentemente que uma função é contínua se não levantarem o lápis quando estão a desenhá-la. Esta função na realidade é contínua

no seu domínio. Só há uma interrupção num elemento, mas esse não faz parte do domínio.

Retornando à função definida por ramos que desenhou no quadro, $\begin{cases} y = x, & 0 \leq x < 2 \\ y = -x + 6, & 2 \leq x < 3 \\ y = x, & x \geq 3 \end{cases}$, a Orientadora Pedagógica mostra que essa função, de domínio $[0, +\infty[$, é descontínua no ponto de abcissa 2, porque aí há um "salto", mas esse ponto pertence ao domínio da função.

Olhando para o gráfico da função, fala-se da forma da curva, a hipérbole, e relembra-se uma função anteriormente estudada, a função de proporcionalidade inversa, usando um exemplo, a variação do comprimento de um rectângulo com área fixa em função da sua largura.

I: E esta curva lembra-vos alguma função que já estudaram?

Aluna: A hipérbole.

Clara: A proporcionalidade inversa.

Entretanto, levanta-se uma dúvida relacionada com o sinal da função que acaba por se relacionar com uma confusão motivada pela igualdade do domínio e do contradomínio, pois o facto de x ser sempre diferente de zero não quer dizer que não há zeros da função.

OP: A Madalena perguntou se para valores de x negativos alguma vez o gráfico da função toma valores de y positivos.

Íris: Não, porque o domínio é IR exceto zero.

I: O zero da função é achado como?

Íris: $f(x) = 0$

I: Nesta função há alguma vez algum objeto com imagem nula?

Alunos: Não.

I: Nunca vai intersectar o eixo dos xx. Quando os valores de x são negativos alguma vez temos valores de $f(x)$ positivos?

Íris: Não.

I: Madalena como é o numerador?

Madalena: É positivo.

I: Então para que a função fosse positiva tinha de se ter o denominador…

Madalena: Positivo.

Alda: Mas é sempre assim?

I: Não, estamos a falar desta função. Esta função tem o domínio igual ao contradomínio, mas não é sempre assim.

Chegada a altura de introduzir um novo conceito, de limite, a investigadora relembra a divisão de potências de base 10. Começa por calcular $f(10)$, depois $f(1)$, $f(0{,}1)$, $f(0{,}01)$,…no quadro. Toda a explicação é apoiada na representação gráfica patente através da calculadora.

I: Estivemos a calcular o valor de $f(x)$ para valores cada vez mais pequenos de x. O que está a acontecer ao valor de $f(x)$?

Alunos: Está a aumentar.

I: [percorrendo o troço do gráfico para $x > 0$] O que é eu estou aqui a fazer? Estou a andar como?

Ricardo: A andar da direita para a esquerda.

I: Guilherme estou a fazer o quê ao valor de x? Estou a…

Guilherme: A diminuir o (valor de) x.

I: O que é que está a acontecer ao valor de y?

Alunos: Está a aumentar.

I: Quando temos o valor de x a tender para zero por valores superiores a zero, o que é que acontece ao valor de y?

Neusa: Está a tender para mais infinito.

I: Quer dizer [escrevendo no quadro], o limite da função f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, quando x se aproxima de zero por valores superiores a zero é $+\infty$. Percebeu Miguel? Não percebeu?

Miguel não percebeu. Outros como ele. Volta-se a explicar, recorrendo muito ao programa *TI-Nspire*.

I: Nós estamos a andar neste sentido [apontando para o gráfico]. O que é que está a acontecer aos valores de y? Estão a …

Miguel: A aumentar.

I: A aumentar cada vez mais, não é? Quando nos aproximamos cada vez mais de zero por valores positivos de x, $\frac{1}{x}$, vai sendo cada vez…

Alunos: Maior.

I: Maior, maior, maior, maior. Em limite… nunca temos $x = 0$; pois não? Nunca calculamos o valor de $f(0)$. E porquê?

Tiago: Porque o domínio é IR exceto zero.

I: Quem é que ainda não percebeu? Todos perceberam?

Constança: Para que é que isto serve... esta coisa do limite?

I: Para perceber que a função em certos zonas não "acaba", para perceber como se pode desenhar o seu gráfico.

Este conceito não deixa os alunos ainda muito à vontade, mas garantem que perceberam.

Aluno: Primeiro estranha-se depois entranha-se.

I: Uma vez que já perceberam, agora vão-me ajudar…quando x tende para zero por valores inferiores a zero o que é acontece?... Estou em que parte do gráfico? … Estou a andar em que sentido?

Alunos: Da esquerda para a direita.… Quando o valor de x aumenta, o valor de y diminui.

I: Atenção que os símbolos de $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais.

Então, avança-se para outro conceito novo, as assíntotas, relacionado com a noção de limites e apelando muito ao gráfico da função.

Alunos: Assíntotas!?

I: Reparem numa coisa, quando nós fizemos o estudo dos limites, chegámos à conclusão que este eixo nunca é intersectado pelo gráfico da função. Se nós pensarmos numa recta vertical para a qual estes troços da função estão a tender, mas nunca tocam, esta é chamada de assíntota vertical.

Tiago: Então isso não é o x igual a zero?

I: Exatamente. A assíntota vertical nesta função é a recta de equação x igual a zero. A assíntota vertical não faz parte da função, é uma recta que, neste caso, é a recta de equação $x = 0$.

Lourenço: Então o y igual a zero é uma assíntota horizontal?

Constança: Todas as funções têm assíntotas?

I: Nem todas. Já agora… dêem-me um exemplo de uma função que não tem assíntotas. [Vão-se traçando algumas funções no quadro e perante uma função afim…] Esta tem uma assíntota?

Tiago: Então uma recta que seja paralela a essa recta não é uma assíntota também?

I: O que acha Tiago? O que acham?

Miguel: Não.

I: O gráfico da função tende para a assíntota, mas nunca a toca, nunca a atinge.

OP: Eu costumo dizer que uma assíntota é uma recta que acompanha a curva e a intersecta no infinito.

I: Vamos voltar àquilo que o Lourenço disse. Acham que ele tem razão? Que há mesmo assíntota horizontal?

Miguel: Pode existir.

I: Mas não é pode existir. Será que, neste caso, existe mesmo?

Íris: Sim, existe mesmo.

I: Assim… qual é a assíntota horizontal.

Tiago: É o eixo dos xx.

Entretanto toca e só há tempo de indicar aos alunos qual o trabalho de casa: o estudo das funções f definida por $f(x)=\frac{3}{x}, x\neq 0$, e g definida por $g(x)=-\frac{2}{x}, x\neq 0$.

A aula correu bem, foi bastante participada, neste caso, essencialmente espontânea e notou-se que os conceitos já trabalhados encontravam-se razoavelmente acessíveis pela memória. Ao ouvir a gravação fica uma sensação estranha de parecer que a sala não estava completa, por haver alunos que nem se ouvem. Se voltasse atrás talvez insistisse numa participação mais solicitada. De qualquer forma, também é interessante deixar às vezes à participação espontânea, sobretudo nestes casos de introdução de novos conceitos.

Quando questionados sobre que representações utilizam, os alunos referiram apenas a gráfica e a analítica. Na realidade, são estas as representações que privilegiam, que utilizam e o modo como as utilizam alterou-se também significativamente com a introdução das calculadoras gráficas, pois permitiu visualizar logo à partida o gráfico, quando antes isso era a última coisa a fazer no estudo de uma função. No estudo da Função Racional f definida por $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, a representação gráfica revestiu-se de especial importância, em particular para a introdução de novos conceitos.

Na determinação do domínio da função, os alunos tiveram alguma dificuldade, uma vez que sabiam que o denominador não podia ser igual a zero, mas não conseguiam traduzir esta afirmação em linguagem matemática. Depois de entendido o domínio, já foi mais evidente definir o contradomínio, bem como representar o gráfico. O facto do contradomínio ser igual ao domínio também gerou alguma confusão.

Para o estudo da paridade, a maioria dos alunos recorreu à representação gráfica, apenas uma aluna recorreu à definição. Na injetividade um dos alunos começou por lembrar a definição, mas os outros apoiaram-se na visualização gráfica usando o teste da recta horizontal.

Os zeros da função não levantaram problema e foram visualmente evidentes.

Na monotonia não houve dúvidas para o intervalo do domínio em que x toma valores positivos, o que já não aconteceu para o intervalo do domínio em que x toma valores negativos, pois os alunos evidenciaram algum embaraço em comparar números fracionários negativos. Neste caso, foi essencial a visualização gráfica. O desenho de funções definidas por ramos, foi o primeiro passo necessário para conseguirem descrever em linguagem matemática a monotonia da função e a diferença entre função crescente e estritamente crescente.

No estudo do sinal da função não parece ter havido grande dificuldade e recorreu-se tanto à representação gráfica da função como à expressão analítica.

Na continuidade surgiram de novo incertezas, pois colocava-se a questão: como seria possível que a função fosse contínua e tivesse uma interrupção? Foi de novo preciso apoiar a explicação no desenho de funções definidas por ramos.

Na introdução do conceito de limite, olhou-se a expressão analítica, mas toda a explicação foi apoiada na sua representação gráfica. Também o conceito novo de assíntotas apelou muito à representação gráfica de função. Estes dois conceitos, que, para quem leciona parecem tão intuitivos, não se mostraram tão evidentes para os alunos. Aqui, como é também usual, houve uma certa "aversão" por algo que é novo, no sentido em que os alunos veem aí mais trabalho.

Será necessário revisitar a monotonia, a continuidade, os limites e as assíntotas, pois os alunos não se sentiram muito à vontade com estes conceitos quando aplicados à função em questão.

O Lourenço esteve atento e foi acompanhando a explicação. Nas suas intervenções identificou que a função não tinha zeros e numa primeira abordagem às assíntotas parece ter percebido o conceito, pois no seguimento da definição da assíntota vertical, questiona se a recta de equação $y = 0$ não será uma assíntota (horizontal) da função.

O Miguel esteve atento e bastante participativo. No início do estudo da função pareceu muito atrapalhado com o domínio e o contradomínio, percebia que x não podia tomar o valor zero, via a função representada na calculadora, mas não conseguia transportar isso para a linguagem matemática da definição de domínio e contradomínio. Mas acabou por compreender. Levantou questões pertinentes, como no caso dos intervalos de monotonia, o que parece revelar ter compreendido o conceito. Soube classificar a função quanto à paridade e explicou a razão. Não compreendeu o conceito de limite com a primeira explicação, mas terá percebido com a subsequente, com mais atenção na representação gráfica. Acabou por se pronunciar sobre funções sem assíntotas e sobre a possibilidade de existência de uma assíntota horizontal.

A Neusa esteve atenta e bastante participativa. Ao relembrar o que é um polinómio, soube descrevê-lo, apesar de usar uma linguagem mais corrente. Foi a que demorou mais tempo a realizar a ficha, o que é de certa forma habitual, pois gosta de trabalhar individualmente, lendo e descrevendo tudo cuidadosamente. No estudo da função, a monotonia não lhe colocou problemas, mas a forma de escrita (“e em”) já não foi tão evidente. No estudo do sinal, não teve dúvidas. Pareceu acompanhar à primeira a introdução do conceito de limite.

O Tiago, muito participativo, teve as suas habituais intervenções precipitadas ao confundir binómio discriminante com polinómio, em termos de nomenclatura. Para a Função Racional em estudo, identificou que x teria de ser sempre diferente de zero. Relembrou o teste da recta vertical para identificar se uma correspondência é uma função. No estudo da função, conseguiu compreender a monotonia para valores de $x > 0$, tanto através da expressão analítica como da representação gráfica, mas para valores de $x < 0$ confessou que a visualização gráfica torna tudo mais fácil. Verbalizou que não se calcula o valor da função no ponto de abcissa zero, porque zero não faz parte do domínio. Conseguiu associar rapidamente a assíntota vertical com a recta de equação $x = 0$, mas achava que, no caso da Função Afim, uma assíntota podia ser uma recta paralela a essa função. Também conseguiu associar a assíntota horizontal com o eixo xx.

4.1.3. Segundo bloco de aulas lecionado sobre Funções Racionais Janeiro 2012

A aula seguinte teve menor duração, porque antes foram abordados assuntos relacionados com a Direção da Turma. Foi áudio-gravada, mas a sua gravação não ficou disponível, o que limitou a recolha de dados. Começou com a correção do trabalho que tinha ido para casa, com ênfase no estudo da influência do parâmetro a nas Funções Racionais definidas por $f(x) = \frac{a}{x}$ com $x \neq 0$ e $a \neq 0$.

Na calculadora gráfica representou-se a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, e as duas funções que foram para trabalho de casa definidas por $f(x) = \frac{3}{x}$, $x \neq 0$, e por $f(x) = -\frac{2}{x}$, $x \neq 0$. A visualização com o programa *TI-Nspire* permitiu mais facilmente confrontar as funções em estudo para trabalho de casa com a que tinha sido analisada na aula anterior.

Os alunos repararam que o gráfico das funções em que o parâmetro a é positivo se encontrava no primeiro e no terceiro quadrantes e aquelas em que a é negativo se encontrava no segundo e no quarto quadrantes. Também notaram que com o aumento do valor absoluto do parâmetro a a curva (hipérbole) ficava mais afastada da origem do referencial e a sua curvatura era menos acentuada. Em conclusão, o que determina o parâmetro a nesta família de funções? Determina o tipo de monotonia da função em cada intervalo contido no domínio, consoante o sinal de a, e a curvatura e o afastamento da origem do referencial, consoante o valor absoluto de a.

De resto, os alunos referiram que o estudo era semelhante ao da função f definida por $f(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0$, à exceção do sinal e da monotonia que apareciam "trocados".

Durante o breve estudo dessas funções chamou-se atenção para a necessidade de completar os raciocínios, não bastando dizer por exemplo que uma função é ímpar, mas sim basear o raciocínio na definição e justificar.

De seguida, relembraram-se as transformações do gráfico de funções que já tinham sido objeto de estudo no ano anterior.

Numa translação vertical, se $g(x)=f(x)+b$, o gráfico da função g obtém-se deslocando o gráfico da função f de b unidades na vertical, para baixo ou para cima, consoante b é negativo ou positivo. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f efetuando uma translação associada ao vector de coordenadas $(0,b)$. Numa translação horizontal, se $g(x)=f(x-a)$, o gráfico da função g obtém-se deslocando o gráfico da função f de a unidades na horizontal, para a esquerda ou para a direita, consoante a é negativo ou positivo. O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f efetuando uma translação associada ao vector de coordenadas $(a,0)$. Se $g(x)=af(x)$, o gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f através de uma expansão na vertical, se a é maior que 1, ou uma contração na vertical, se a está entre 0 e 1. Se $g(x)=f(ax)$, o gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f através de uma contração na horizontal, se a é maior que 1, ou uma expansão na horizontal, se a está entre 0 e 1. Se $g(x)=f(-x)$, o gráfico da função g é simétrico ao gráfico da função f em relação ao eixo dos yy. Se $g(x)=-f(x)$, o gráfico da função g é simétrico ao gráfico da função f em relação ao eixo dos xx. Foi distribuída uma ficha informativa, com estas transformações dos gráficos de funções.

Foi distribuída a ficha de trabalho 21A (Anexo 3) e já só houve tempo para fazer o primeiro exercício, no qual se pretendia fazer a correspondência entre a expressão analítica e a representação gráfica de funções definidas por $f(x)=\dfrac{a}{x+c}$, $a\neq 0$ e $x+c\neq 0$, sem a utilização da calculadora, recorrendo aos conhecimentos das transformações dos gráficos de funções. Esta tarefa decorreu sem grandes problemas para a maioria dos alunos. O estudo dessas funções foi para trabalho de casa.

Na revisão das transformações dos gráficos de funções, os alunos mostraram que alguns conhecimentos anteriormente adquiridos estão latentes e podem ser invocados, se bem que ficou a sensação de que alguns tinham memorizado regras para as transformações e as sabiam aplicar bem às Funções Quadráticas. A sua aplicação às Funções Racionais não foi imediata, mas mediante a verificação, por exemplo, por substituição de pontos no gráfico das funções acabou por ser compreendida.

A aula seguinte correu bem e foi, como habitual, participada. Em geral, os alunos conseguiram compreender o papel do parâmetro a nas Funções Racionais definidas por $f(x)=\dfrac{a}{x}$, $x\neq 0$ e $a\neq 0$, que tinha sido o objetivo do trabalho de casa, não totalmente conseguido, uma vez que alguns alunos se tinham limitado a decalcar as características da função f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, para as outras funções.

A revisão das transformações dos gráficos de funções fluiu bem, dado que os alunos evidenciaram ter esses conhecimentos relativamente interiorizados, e a sua aplicação às Funções Racionais acabou por se tornar eficaz.

Esta aula recorreu muito ao apoio da visualização da representação gráfica desta família de Funções Racionais para mais facilmente evidenciar as diferenças e as semelhanças entre elas com a variação do parâmetro a e para rever as transformações dos gráficos de funções. Por sua vez, a ficha de trabalho obrigava à utilização simultânea da expressão analítica e da representação gráfica para levar à compreensão e agilização do processo de tradução entre ambas.

Tanto o Miguel, como a Neusa, como o Tiago foram dos alunos que participaram mais ativamente nestas aulas, conseguindo rapidamente compreender qual a influência do parâmetro nesta família de Funções Racionais. Quanto ao estudo das funções definidas por $f(x)=\dfrac{a}{x}$, $x\neq 0$ e $a\neq 0$, a Neusa mostrou ter os conteúdos interiorizados mais solidamente, enquanto o Lourenço, o Miguel e o Tiago o faziam mais por reprodução do estudo da aula anterior. O Miguel, a Neusa e o Tiago relembraram com relativa facilidade os conceitos estudados no 10º ano relativamente às transformações e aplicaram-nos às funções em estudo, sendo inicialmente não tão evidente para o Tiago. O Lourenço seguiu as intervenções na aula e evidenciou que os conteúdos do ano anterior respeitantes às transformações dos gráficos de funções necessitavam ser relembrados, trabalhados e consolidados, de modo que a sua aplicação às Funções Racionais não foi evidente.

4.1.4. Terceiro bloco de aulas lecionado sobre Funções Racionais Janeiro 2012

A aula seguinte inicia-se, revisitando conceitos que ficaram menos interiorizados nos dias anteriores, a começar pela continuidade. Foram analisadas duas funções definidas por ramos de forma a clarificar melhor este conceito de continuidade. Não foi escrita nenhuma expressão analítica, recorrendo-se apenas ao aspecto gráfico. Desenharam-se no quadro as funções definidas por $\begin{cases} y = x, & x < 2 \\ y = x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$ e por $\begin{cases} y = x, & x < 4 \\ y = x, & x > 4 \end{cases}$. Após esta nova abordagem, estas noções terão ficado mais consolidadas, se bem que se apresentem ainda problemas de linguagem matemática.

> I: O que é que temos andado a estudar?.... Funções que são quociente entre dois polinómios e em que o polinómio em denominador tem de ser diferente de zero. E, neste estudo, surgiram dúvidas, relacionadas, por exemplo, com a continuidade e que é preciso esclarecer.
>
> I: Esta função que está aqui [indicando a primeira função] tem que domínio, Nelson?
>
> Nelson: IR.
>
> I: Exato. Ou seja, o domínio é tudo o que vai de $-\infty$ até $+\infty$. Mas para $x = -2$, há uma interrupção. Quer dizer que a função tem um ponto de descontinuidade no ponto de abcissa -2. Ela é contínua em IR excepto -2.
>
> I: O que é que acontece aqui [indicando a outra função], Guilherme? Qual é o domínio desta função?
>
> Guilherme:…
>
> I: Está uma bolinha aberta no 4, o que quer dizer que o 4 não tem imagem, o 4 não é objeto desta função. Assim, o domínio desta função é IR excepto 4. Tem algum ponto de descontinuidade esta função?
>
> Alunos; O 4.
>
> I: Mas o 4 nem sequer pertence ao domínio.
>
> Alexandre: Não tem (ponto de descontinuidade). É contínua.
>
> I: Realmente, esta função é contínua no seu domínio, porque o ponto que podia dar algum problema é o de abcissa 4, mas esse nem sequer pertence ao domínio.

Tiago: *Stôra* essa [indica a primeira função] é como? A *stôra* disse que é contínua.

I: Eu não devo ter dito isso. Se disse, peço desculpa pelo meu engano. Esta função tem um ponto de descontinuidade para $x=-2$, ou seja, ela é contínua de $-\infty$ até -2 e de -2 até $+\infty$. Mas não se diz que é descontínua, não se diz assim. Diz-se que esta função tem um ponto de descontinuidade para $x=-2$.

I: E agora nesta [voltando à segunda função] função… qual era aqui o problema? Era serem tentados a dizer que, no ponto de abcissa 4, a função é descontínua. Mas não é, não tem significado dizer se é aí descontínua ou não, porque o ponto de abcissa 4 não pertence ao domínio desta função. Esta função tem de domínio IR excepto 4 e no seu domínio ela é contínua. E porquê? [Torna-se a repetir o raciocínio] Agora imaginem que de propósito eu acrescento uma imagem para o número 4. E essa imagem vale -3. Qual é agora o domínio daquela função?

Alunos: IR

I: Não há dúvida que o domínio é IR? E então, agora, o que é que se passa quanto à continuidade? Já tem um ponto de descontinuidade. Qual é? É o ponto de abcissa 4. Porquê? Porque 4 já pertence ao domínio e há ali uma interrupção.

Tiago: Mas por ter um ponto de descontinuidade, quer dizer que é descontínua?

I: Não. Eu não sei essa expressão. Eu só sei dizer que ela tem um ponto de descontinuidade em…

Miguel: Se não tivesse esse ponto de descontinuidade, a função era contínua?

I: Era. Quando não tinha aqui este ponto de abcissa 4, eu não me tinha de preocupar com ele. Porquê? Porque o 4 não pertencia ao domínio da função.

Passando agora para a noção de assíntotas, que originou também alguma incerteza, foi estudada a função f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$, $x\neq 5$. Salientou-se que se "desconfia" que possam existir assíntotas verticais nos pontos que não pertencem ao domínio da função. Quanto às assíntotas horizontais procuram-se os limites quando x é muito grande em valor absoluto. Tendo sempre presente a expressão analítica da função, a explicação relativamente às assíntotas foi suportada pela representação gráfica.

I: Onde é que nós desconfiamos que possam existir assíntotas verticais do gráfico de uma função?

Tiago: Em $x=0$.

I: Em?… pontos da função que não fazem parte do domínio.

Miguel: Pontos de descontinuidade.

OP: Também vão ser, mas esses serão tratados para o ano.

I: Imaginem que eu tenho esta função f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ … não se percam se não é difícil. Sem obter o gráfico, Ramiro, como é que rapidamente eu posso dizer qual é o domínio da função?

Ramiro: IR excepto zero…

I: Excepto…?

Ramiro: -5.

Alunos: 5

Ramiro: Exato.

I: O que é que o Ramiro está a dizer? Qual é o valor de x que transformava aquele denominador em zero e o valor que transformava era o 5. Se o 5 não pertence ao domínio da função, eu vou desconfiar que poderá haver aí uma assíntota vertical.

Tiago: E o contradomínio é sempre IR excepto…?

I: E o contradomínio desta função, conseguem imaginar qual era?

Alunos: IR excepto zero.

Tiago: Mas porquê?

Íris: Porque a função nunca é igual a zero.

I: Eu vou recorrer ao gráfico para ser mais fácil… O que é que estou a fazer neste momento?

Ricardo: A assíntota.

I: No fundo estou ali a traçar a assíntota vertical… agora se eu não tenho nada para desenhar o gráfico, dava valores. Pensava assim: esta função alguma vez é zero?

Alunos: Não.

I: Ou seja, o gráfico da função não intersecta o eixo dos xx. E será que intersecta o eixo dos yy alguma vez?

Alunos: Pode... sim... não…

I: Para intersectar o eixo dos yy, o valor de x tinha de ser…?... zero. E calculando $f(0)$… quanto é que dá? Quando x vale zero?

Alunos: $-\dfrac{1}{5}$.

I: E agora podiam dar-se mais valores… Por exemplo se o x for 6, dá 1. Se o x for 20, dá…

Alexandre: $\dfrac{1}{15}$.

I: Estão a imaginar a função a vir para aqui [desenhado o gráfico no quadro)? E se o x for 5.5? … Eu estou a imaginar, sem calculadora, que o gráfico vai ser uma coisa deste tipo. E agora, se eu continuasse a dar valores, imagino que o gráfico fosse deste tipo. Já alguém introduziu a função na calculadora? Tentem para dizer se isto está certo. Dá isto mais ou menos?

Tiago: Não.

I: Atenção à forma como colocam a expressão analítica na calculadora. Não se esqueçam dos parêntesis… atenção ao denominador… de contrário acabam por dividir 1 por x, subtraindo 5 de seguida. Vejam lá então…

Tiago: Não dá *stôra*... Ah! Dá isso dá, *stôra*. Ah, por isso é não me estava a dar nada quando eu fiz a ficha.

I: Ouçam lá. Eu desconfiei. Porque é que eu desconfiei da recta de equação $x = 5$ como assíntota do gráfico da função? Porque 5 não pertencia ao domínio da função. Porque é que a recta de equação $x = 5$ é assíntota do gráfico da função? Não é só porque 5 não pertence ao domínio. O que é acontece?

Tiago: Porque a função nunca chega a tocar nesse…5.

I: Porque o limite quando x se aproxima de 5 por valores superiores a 5 vai dar $+\infty$. E o que acontece ao limite quando x tende para 5 por valores inferiores a 5?

Tiago: $-\infty$.

I: Quer dizer que quando isto acontece… quando a recta de equação $x = 5$ é assíntota vertical do gráfico da função… isto ficou ontem escrito nos vossos apontamentos. Eu vou passar a usar apenas as iniciais (para as assíntotas)…. E porque é que nesta função a assíntota horizontal é a recta de equação $y = 0$?

Tiago: Porque o limite...

I: Alda vamos lá…… quando eu vou à procura das assíntotas horizontais, vou sempre à procura dos limites quando x é muito grande em valor absoluto. Vamos lá Alda… o limite desta função f quando x é um número muito grande, quando x tende para $+\infty$…

Alexandre: Igual a zero.

I: Este aproxima-se de…?

Alda: 0.

I: O limite quando x tende para $-\infty$ de f também é zero. Quando acontece uma destas coisas e não precisam ser os dois limites, basta um, diz-se que a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função.

A aula continua com a análise dum caso particular, para o qual é preciso ter atenção.

I: Agora, repararam que eu tive a preocupação de lhes dizer onde desconfiamos das assíntotas verticais e dissemos que era nos pontos que não pertencem ao domínio… isto agora ficou claro? Agora imaginem esta função assim [escrevendo $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ no quadro]. Esta pergunta será para a Neusa. Eu tenho esta função f … Qual é o seu domínio?

Miguel: Domínio?

Neusa: IR excepto 5.

I: O domínio é IR excepto 5. O que tudo nos leva a crer, com tudo o que acabámos de ver, que a recta de equação $x = 5$ poderá ser uma assíntota vertical do gráfico desta função. Será? Experimentem com a calculadora… cuidado com os parêntesis… Pois… dá uma recta, o que é estranho. Não estavam à espera que desse uma recta? Quem é que estava à espera que desse uma recta?

Guilherme: Ao quadrado… uma parábola.

I: Qual é o problema aqui? Eu quero chamar à atenção para isto por causa da história de desconfiar das assíntotas… porque não vai ser? Porque para esta função pode-se reescrever a expressão analítica da seguinte maneira [escrevendo no quadro $f(x) = \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$]. E agora o que é que eu posso fazer aqui?

Alunos: Cortar.

I: Simplificar… agora cuidado, esta função não é uma recta. É uma recta, mas com um buraco. Mas porque vai ter um buraco? Porque o domínio continua a ser IR excepto 5. Nas vossas calculadoras não se vê este buraco.

Tiago: Então não há assíntotas?

I: Ouviram o que a Alda disse? A Alda entretanto verificou na calculadora que, ao pedir o valor da função para $x = 5$, a calculadora lhe diz que é impossível.

I: Mas oh Neusa… Então e agora, conseguia arranjar uma regra? Quando é que os pontos que não pertencem ao domínio não serão assíntotas?

Alda: Um caso notável?

I: Quando há alguma simplificação de fracção. Se der para simplificar, claro que desaparece aqui o denominador e no fundo acaba por não haver assíntota. Mas isto dito de outra maneira: para ser assíntota vertical o que tinha de acontecer quando x se aproximava de 5 por valores inferiores… o limite tinha de ser quanto?

Aluno: Zero.

Alunos: Infinito.

I: $+\infty$ ou $-\infty$. E aqui, quando x se aproxima de 5, de quanto se vai aproximar o valor da função?

Tiago: 10.

I: 10. Quer seja por valores inferiores a 5 quer seja por valores superiores a 5. Por isso não é assíntota. Só é assíntota se pelo menos um destes limites, basta um, for $+\infty$ ou $-\infty$.

Alda: Então essa função não tinha assíntotas?

I: Não tinha assíntotas.

Alda: E limites?

OP: Podemos falar de limites… mas não estamos a falar agora desses limites… para o ano há um capítulo inteiro…

I: Então se eu pedisse ao Lourenço para me fazer um resumo das assíntotas, o que é que me diria?
Lourenço: Eu não sei.
I: Não conseguia dizer, Lourenço? O que lhe venha à ideia vá lá. São rectas?
Lourenço: Também… não são bem limites.
I: No fundo (são rectas que) vão acompanhando as curvas e encontram-nas no infinito. Falámos de assíntotas…
Lourenço: Verticais e horizontais.
I: Desconfiamos das assíntotas verticais nos pontos que não pertencem ao domínio ou nos pontos de descontinuidade da função. As assíntotas horizontais têm a ver com o comportamento da função quando x tende para…
Lourenço: $+\infty$.
I: Ou para…?
Lourenço: $-\infty$.
OP: Isto é só o que têm de saber sobre as assíntotas. Não fiquem assustados com as assíntotas.
Lourenço: A *stôra* diz que, para ver as assíntotas, vamos aos pontos que não pertencem (ao domínio). Mas não é sempre pois não?
I: É verdade, mas estes são casos particulares. Mas depois pega na calculadora e confirma.

Passa-se então à correção da ficha 21A (Anexo 3), que foi para trabalho de casa. O Miguel começou a fazer o estudo da função g definida por $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x+1\neq 0$, introduziu-a na calculadora gráfica e depois passou a identificar o domínio, o contradomínio,….

I: O Miguel já viu que se enganou. O gráfico não é simétrico em relação à origem do referencial.. … nem par. Outra maneira para vermos… Qual é a dúvida da Catarina?… Vamos ver analiticamente… para estudarmos a paridade … vamos calcular $g(-x)$ e $-g(x)$. Para calcular $g(-x)$ vamos pegar na expressão analítica da função e onde está x colocamos $-x$…. Como $g(x)$ é diferente de $g(-x)$ a função não é par. Como $-g(x)$ é diferente de $g(-x)$ a função também não é ímpar. Logo a função não é par nem ímpar.
Miguel: … [fala sobre a continuidade da função]…
I: Vamos então aos limites… o Guilherme vai-me dar uma ajuda. Eu tenho de calcular no fundo quatro limites…É preciso calcular o limite quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$ da função g. Qual é o ponto que não pertence ao domínio?
Guilherme: -1.

I: Então, tem de se calcular o limite quando x tende para -1. O que é preciso acrescentar?

Alunos: Mais.

I: Num sinal mais e noutro sinal menos.

Guilherme: Oh stôra isso é que é estranho, pôr um mais num número negativo.

I: Olhem lá a dúvida do Guilherme. O Guilherme não queria escrever aqui um sinal mais, porque -1 é um número negativo. Aquele sinal $+$ não tem nada a ver com ser um número positivo.

Alexandre: É por valores maiores do que -1.

I: E o sinal menos… A função está-se a aproximar de -1 por valores que estão antes de -1. Está certo, agora? Guilherme, preencha lá isto. Quando o valor de x está a ser um número muito grande, o valor de y está-se a aproximar de …

Guilherme: Zero.

I: E quando o valor de x se está a aproximar de -1 por valores superiores, y tende para quanto?

Alunos: $+\infty$.

I: E quando x tende para -1 por valores inferiores?

Alexandre: $-\infty$.

I: Aqui escrevo zero. E aqui?

Guilherme: Zero

I: Guilherme, ficou agora percebido? Miguel, estávamos nos limites…

Miguel: $y=0$ é a assíntota horizontal e $x=-1$ é a assíntota vertical.

Catarina: Normalmente, quando fazemos os limites, pomos só aqueles dois limites de baixo, mas a professora está a pôr os quatro para fazer as assíntotas. Se a professora pedir os limites de uma função, nós pomos quais?

OP: Eu não lhes vou pedir limites. Vou-lhes pedir equações de assíntotas e, para isso, têm de calcular os limites. … posso pedir para preencher os espaços.

Miguel: É possível os limites serem diferentes?

OP: É.

Miguel: Então se forem, como é que eu sei qual é a equação da recta?

OP: A pergunta é muito engraçada. Nem sempre os limites quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$ são iguais. Uma função pode ter duas assíntotas horizontais… mas não as funções que estão a estudar… para o ano. …

OP: Vamos, Guilherme… Uma coisa engraçada que o Guilherme está a ver… o gráfico de uma função pode intersectar a assíntota. Até aqui a assíntota horizontal não era intersectada pelo gráfico da função. E agora, se eu pensar nesta recta, o gráfico intersecta-a. Mas eu nunca disse que não intersectava. O que não intersecta são as assíntotas verticais. São pontos que em princípio não pertencem ao domínio. As horizontais podem… o que interessa com as assíntotas horizontais é o comportamento da função quando x é um valor muito grande… em valor absoluto…Qual é o limite desta função quando x tende para 0^+, ou seja, por valores superiores a 0?

Continuando, foi a vez da Madalena fazer o estudo da função h definida por $h(x)=\frac{1}{x-2}$, $x\neq 2$, e, por fim, o Ricardo indicou as caracterísitcas da função i definida por $i(x)=-\frac{1}{x-3}$, $x\neq 3$, e foi ao quadro escrever os limites e as assíntotas. Optou-se por não corrigir o estudo da última função j definida por $j(x)=\frac{5}{x+1}$, $x\neq -1$, pois foi considerada similar às anteriores e os alunos não apresentavam dúvidas.

A aula correu bem, foi bastante participada, muito espontaneamente, e permitiu trabalhar conceitos menos intuitivos para os alunos que não tinham ficado completamente interiorizados (continuidade quando há pontos que não pertencem ao domínio e pontos de descontinuidade, limites e assíntotas, casos particulares de rectas com interrupções), sendo depois mais fácil o alargamento do estudo de Funções Racionais definidas por $f(x)=\frac{a}{x}$, $x\neq 0$ e $a\neq 0$ a funções definidas por $f(x)=\frac{a}{x+b}$, $x\neq -b$ e $a\neq 0$. Não foi evidente para os alunos aceitarem que uma função se diz contínua, quando tem pontos que não pertencem ao domínio e quando se olha para o gráfico e se observam interrupções.

Durante toda a aula, foi essencial o recurso à representação gráfica, sendo perceptível que os alunos conseguem identificar os limites e as assíntotas, através dessa representação, e só recorrem à expressão analítica, quando para tal são solicitados.

O Lourenço evidenciou bastantes debilidades na compreensão dos conceitos, não conseguindo discorrer sobre limites e assíntotas; sabe que há assíntotas verticais e horizontais, mas não compreende o que representam.

O Miguel esteve relativamente atento e participativo. No caso da continuidade, quis saber se uma função, não tivesse um ponto de descontinuidade, era contínua. Quis confirmar uma terminologia que tinha ouvido (funções hiperbólicas), se bem que o momento escolhido não foi o mais oportuno, tendo interrompido a chamada de atenção sobre casos particulares, o que acontece com alguma frequência. Quando refere pontos de descontinuidade em vez de pontos que não pertencem ao domínio para a definição das assíntotas, evidencia que não compreendeu exatamente a diferença entre ambos. Fez o estudo de uma função sem grandes problemas, tendo-se enganado apenas na classificação quanto à paridade, fruto de alguma precipitação, e conseguiu defini-la claramente em termos de continuidade e assíntotas. Quis, ainda, perceber se uma função pode ter limites diferentes e, nesse caso, como se identifica a equação da assíntota.

A Neusa esteve atenta e participou essencialmente por solicitação. Foi-lhe pedido para definir o domínio de uma função, que à partida se assemelhava a uma Função Racional, mas que na realidade era representada por uma recta com uma “interrupção”. Depois deveria tentar delinear uma regra que estabelecesse quando é que os pontos não pertencentes ao domínio conduzem a equações de assíntotas verticais. Acontece com alguma frequência a Neusa ser solicitada para perguntas um pouco fora do habitual, que obrigam a um raciocínio mais criativo.

O Tiago esteve atento e participativo. A continuidade foi algo que seguiu com atenção, porque lhe levantava dúvidas e quis saber se uma função por ter um ponto de descontinuidade se dizia descontínua. No caso das assíntotas, indicou logo qual a assíntota vertical. Já o contradomínio da função seria mais facilmente entendido como IR em vez de IR excepto…Na utilização da calculadora, continuou a fazer erros que já deveriam estar ultrapassados, tais como numa fracção se esquecer de colocar parêntesis quando o denominador é um binómio e depois não ser suficientemente crítico para detectar essa falha. Conseguiu compreender porque é que uma recta é assíntota, associando ao facto do gráfico da função não tocar nessa recta e tender para infinito quando x tende para esse ponto. Na análise de uma função que se assemelhava a uma Função Racional, mas que era uma recta com uma “interrupção”, inicialmente estranhou não haver assíntotas, mas depois conseguiu ver que os limites da função nesse ponto eram números finitos.

4.1.5. Blocos de aulas subsequentes lecionados sobre Funções Racionais Janeiro 2012

Nas aulas seguintes, o estudo das Funções Racionais foi consolidado através da resolução de exercícios, nomeadamente da ficha de trabalho 22A (Anexo 4), e alargado a funções definidas por $f(x)=c+\dfrac{a}{x+b}$, $x+b\neq 0$, com o consequente estudo de limites e assíntotas. As duas representações das funções (expressão algébrica e gráfica) estiverem sempre presentes e foram mais ou menos necessárias consoante as solicitações. Regra geral, os alunos associaram os parâmetros b e c às assíntotas, se bem que para muitos foi mais como uma forma de memorização do que compreensão, conseguindo fazer a tradução entre representações. Já o caso do parâmetro a não foi tão evidente. O efeito dos parâmetros, a, b e c, na transformação dos gráficos de Funções Racionais também parece ter ficado interiorizado por alguns.

O Lourenço foi tentando trabalhar em sala de aula, notando-se, porém, a falta de trabalho autónomo em casa, com repercussões evidentes na evolução da aprendizagem, na compreensão dos conceitos e na rapidez de execução das tarefas.

O Miguel foi trabalhando em sala de aula muito por obrigação. Como tinha seguido as aulas anteriores e os conceitos tinham na sua maioria sido apreendidos, foi conseguindo aplicá-los com relativa segurança, apesar da notória falta de trabalho em casa.

A Neusa trabalhou muito bem e individualmente, como prefere e é seu hábito, mostrou ter compreendido bem os conceitos e saber aplicá-los com segurança.

O Tiago foi trabalhando em sala de aula, de certa forma obrigado, pois afirma que não se consegue concentrar neste tipo de trabalho autónomo, mas notou-se a falta de trabalho em casa. Como tinha seguido as aulas anteriores com atenção e os conceitos tinham, na sua maioria, ficado apreendidos, foi-os aplicando com alguma confiança às tarefas solicitadas.

4.2. Fichas de Trabalho

4.2.1. Ficha de trabalho nº 19A (Anexo 1)

Na aula anterior à primeira aula lecionada sobre Funções Racionais, a investigadora entregou uma ficha para trabalho de casa, solicitando que os alunos descrevessem duas representações de funções, uma na sua expressão analítica (uma Função Afim) e outra na sua representação gráfica (uma Função Quadrática). A palavra função não foi, propositadamente, referida. Esta ficha de trabalho tinha por objetivo compreender se os alunos conseguiam elaborar um texto matemático, de que forma abordavam duas representações diferentes de funções já estudadas em anos anteriores e que procedimentos usavam.

No caso da função representada pela sua expressão analítica, $y = -2x + 3$, regra geral, os alunos fizeram a representação gráfica através da determinação de dois pontos. Apenas dois alunos, nos quais se inclui Tiago, o fizeram usando mais pontos. No caso do Tiago, como o próprio já o afirmou, a escolha de um terceiro ponto serve como verificação. Três alunos não apresentaram representação gráfica da função. Apenas uma aluna não conseguiu fazer uma transposição correta, se bem que identifique que se trata de uma recta. A maioria dos alunos, à exceção de quatro, apresenta características da função. A Neusa descreveu por palavras o processo de tradução da representação analítica para gráfica. O Tiago não indicou características da função.

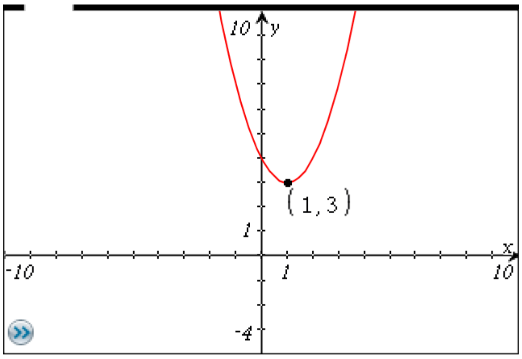


Figura 1 – Função Quadrática

No caso da função representada graficamente (Figura 1), todos os alunos, à exceção de uma aluna, conseguiram chegar a uma expressão analítica correta da função, representada por uma parábola, partindo da equação $y = a(x-h)^2 + k$ na qual identificaram o parâmetro a como definidor do sentido da concavidade e os parâmetros h e k como indicadores das coordenadas do vértice da parábola. Apenas uma aluna não calculou a expressão analítica da função. À exceção de três alunos, todos os outros descreveram características da função. Novamente, Neusa descreve por palavras o processo de tradução da representação gráfica para analítica. Cinco dos alunos apresentam a expressão final na forma $y = ax^2 + bx + c$ e Neusa chega mesmo a dizer que esta é que é a forma correta. O Tiago não apresentou características da função.

Dum modo geral, este tipo de funções, cujo estudo foi iniciado em anos anteriores, parece estar relativamente bem interiorizado e consolidado e a tradução entre representações parece ser feita com aparente facilidade, em especial para a Função Afim, o que foi também confirmado por diversas vezes em sala de aula, uma vez que era comum a Orientadora Pedagógica aproveitar para relembrar a construção e tradução entre representações de funções estudadas em anos anteriores, sempre que aplicável.

No caso da Função Afim, tantas vezes invocada ao longo do ano, como por exemplo na definição das restrições aquando do capítulo da programação linear ou na elaboração do quadro de estudo de sinal das Funções Racionais, em que alguns dos fatores eram polinómios de primeiro grau, os alunos não mostraram dificuldade em identificar o papel dos parâmetros a e b na família de funções representadas por $y = ax + b$, tanto em termos da representação algébrica como da representação gráfica. Os alunos passavam sem dificuldade e indiferentemente duma representação para a outra. A representação tabular aparecia apenas para poucos e como apoio para a representação gráfica, outros atribuíam valores aos pontos mentalmente.

No caso das funções quadráticas, descritas por todos os alunos como tratando-se de uma função cuja representação gráfica é uma parábola, apenas o parâmetro a tem um significado imediato na família de funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$ com a ≠ 0, sendo identificado com o sentido da concavidade. Afirmam os alunos, se $a > 0$ a concavidade será virada para cima, se $a < 0$ a concavidade será virada para baixo. De resto, os alunos recorrem à calculadora para traçar o gráfico da função. Alguns alunos resolvem a equação $ax^2 + bx + c = 0$ de modo a calcular os zeros da função e a maioria identifica estes zeros como as abcissas dos pontos em que a função intersecta o eixo dos xx. Se a função está representada por uma equação do tipo $y = a(x-h)^2 + k$ com a ≠ 0, quase todos a associam à representação gráfica de uma parábola e qual o tipo de concavidade. Alguns alunos indicam, de imediato, quais são as coordenadas do vértice dessa parábola. Já na passagem da representação gráfica para a algébrica, os alunos usam exclusivamente a expressão $y = a(x-h)^2 + k$, com a ≠ 0, se bem que alguns tenham de recorrer aos manuais ou ao caderno como apoio. A representação tabular nunca foi usada para este tipo de funções.

No caso da Função Afim, a Neusa começou por identificar qual a sua forma e qual a ordenada na origem e o que esta significa. Depois passou para o processo de descrição da representação gráfica, definindo as coordenadas de mais um ponto. No caso da Função Quadrática, começou por nomear a curva e identificar as coordenadas do vértice. Passou depois para o processo de determinação da sua expressão analítica do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, substituiu na expressão as coordenadas do vértice, considerou as coordenadas de mais um ponto que leu no gráfico e explicou o porquê do sentido da concavidade, todo o processo sendo acompanhado de uma descrição. Resolveu a equação para apresentar a função na forma $y = ax^2 + bx + c$, que entendeu ser a correta. O Tiago, no caso da Função Afim, determinou três pontos e desenhou o gráfico. Na Função Quadrática começou por escrever a expressão $y = a(x-h)^2 + k$ e identificar as coordenadas do vértice, substituindo-as depois na expressão. Considerou as coordenadas de mais um ponto que leu no gráfico e substituiu na expressão para calcular o parâmetro a. Apresentou depois a expressão analítica da Função Quadrática. Já o Lourenço e o Miguel não realizaram esta tarefa.

4.2.2. Ficha de trabalho nº 20A (Anexo 2)

Imediatamente a seguir à introdução das Funções Racionais, foi entregue esta ficha de trabalho aos alunos, na qual se solicitava o estudo da função f definida por $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Esta ficha de trabalho tinha por objetivo aferir o desempenho dos alunos no estudo de uma função, como conseguiam aplicar os conhecimentos que tinham ao estudo de uma Função Racional e que procedimentos usavam.

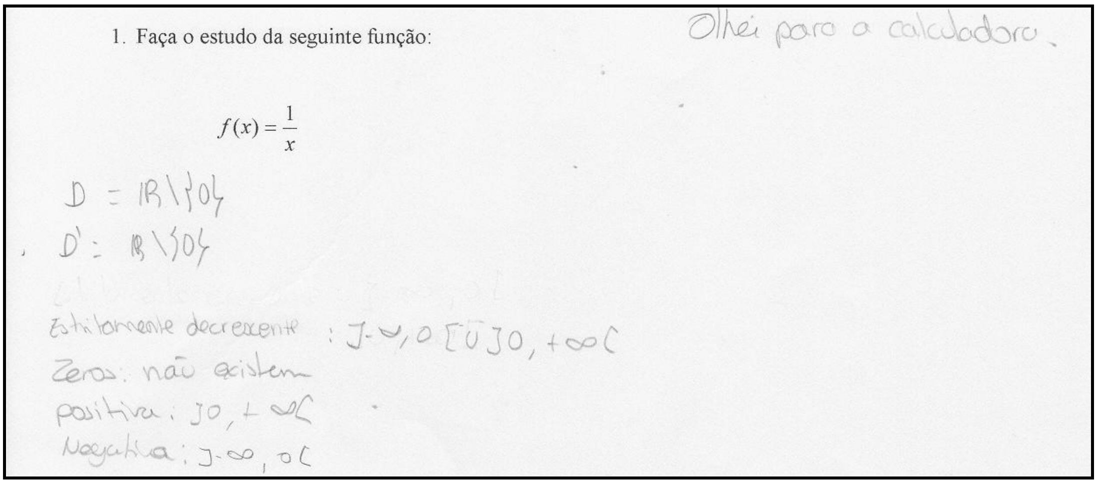
Todos os alunos recorreram à calculadora gráfica para esta tarefa, alguns logo de início e alguns passaram a representação gráfica para papel. Na sua maioria relembraram (ou consultaram no caderno ou no manual) procedimentos para o estudo das funções; no entanto, poucos conseguiram fazer um estudo completo e justificado. Aparte dois alunos, todos os outros parecem compreender alguns dos conceitos inerentes às características das funções, se bem que não os justificam, nem se apoiam nas definições. É de notar alguns casos de utilização incorreta da notação matemática.

Logo no início da execução desta tarefa, levantaram-se incertezas relativas ao domínio e ao contradomínio, que foram, no entanto, sendo resolvidas após algum debate. Conceitos como a continuidade e a monotonia aplicados a esta função mostraram-se os mais difíceis de atingir.

Uma aluna definiu o domínio e o contradomínio como IR e outra como $]-\infty,0] \cup [0,+\infty[$, sendo de admitir a possibilidade de se tratar, para esta aluna, duma incorreção nos sinais de intervalo, que lhe é tão habitual. No estudo do sinal e dos zeros da função, efetuado respectivamente por dezanove alunos e dezoito alunos, não se encontraram incorreções. Também dos doze alunos que analisaram os extremos, apenas um aluno escreveu “maximizante $=+\infty$” e “minimizante $=-\infty$”. No estudo efetuado à injetividade da função, doze alunos classificaram-na corretamente, apenas uma aluna escreveu que a função não é injetiva, visto que vários objetos têm a mesma imagem. Foram dezanove os alunos que estudaram a função quanto à paridade e, à parte uma aluna que definiu paridade mas não concluiu se a função era par ou ímpar, outra aluna que disse que o gráfico da função é simétrico em relação à origem e com o eixo dos yy, outra aluna que escreveu que a função é par porque o gráfico é simétrico em relação à origem do referencial e o Tiago que disse que o gráfico da função é simétrico em relação à origem mas esqueceu-se de a classificar, todos os outros a definiram corretamente.

Dos sete alunos que estudaram a função quanto à continuidade, apenas dois a classificaram como não sendo contínua. Já a monotonia levou a uma certa confusão. Dos quinze alunos que estudaram a função quanto à monotonia, cinco escreveram que a função é decrescente em $\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$, uma aluna afirmou que a função é decrescente quando $x\in\left]-\infty,+\infty\right[$, Neusa disse que f é estritamente decrescente $\forall x\in D_f$ e uma aluna escreveu apenas que é decrescente. Uma aluna afirmou que a função é crescente em $\left]-\infty,0\right[$ e decrescente em $\left]0,+\infty\right[$. Já um aluno, sem qualquer razão aparente, afirmou que a função é crescente em $\left]-\infty,-1\right]$.

O Lourenço (Figura 2) indicou o domínio e o contradomínio, referiu que a função não tem zeros e caracterizou-a quanto ao sinal e aos zeros. Na monotonia descreveu a função como estritamente decrescente em $\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$. O Lourenço fez um estudo incompleto, pouco detalhado, não apoiado nas definições e não justificado.


1. Faça o estudo da seguinte função:

Olhei para a calculadora.

$f(x)=\frac{1}{x}$

D = IR\{0}

D': IR\{0}

Estritamente decrescente :]-∞,0[∪]0,+∞[

Zeros: não existem

positiva:]0,+∞[

Negativa:]-∞,0[

Figura 2 – Resolução da ficha de trabalho 20A - Lourenço

O Miguel (Figura 3) transcreveu a representação gráfica da calculadora para o papel, indicou o domínio e o contradomínio da função, caraterizou quanto ao sinal e referiu que a função é ímpar e contínua. No domínio e contradomínio usou incorretamente o sinal $/$ em vez de $\backslash$ ao escrever $IR/\{0\}$. O Miguel fez também um estudo incompleto, pouco detalhado, não apoiado nas definições e não justificado.

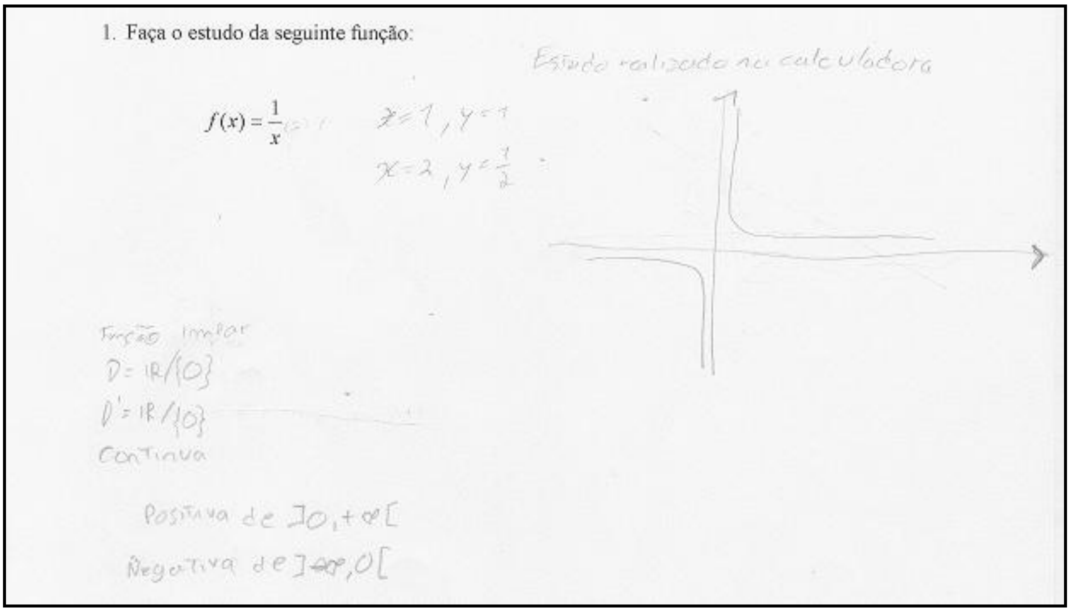


Figura 3 - Resolução da ficha de trabalho 20A - Miguel

A Neusa (Figura 4) também transcreveu a representação gráfica da calculadora para o papel, indicou o domínio e o contradomínio, que a função não tem zeros, classificou quanto à injetividade, sinal e qualificou, justificando, quanto à monotonia, paridade e máximos e mínimos relativos e absolutos. Na monotonia escreve que " f é estritamente decrescente $\forall x \in D_f$ ". A Neusa apresentou um estudo completo, detalhado, apoiado nas definições e justificado.

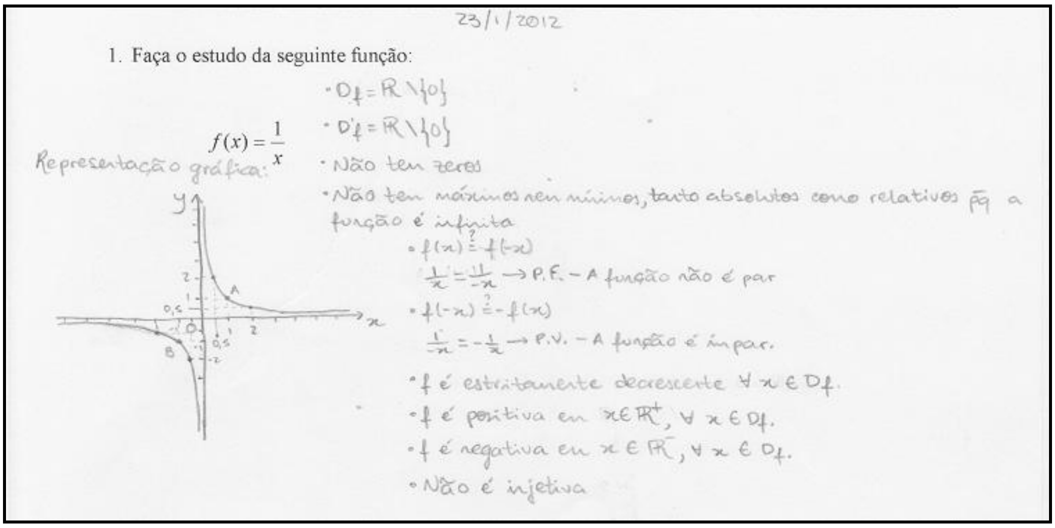
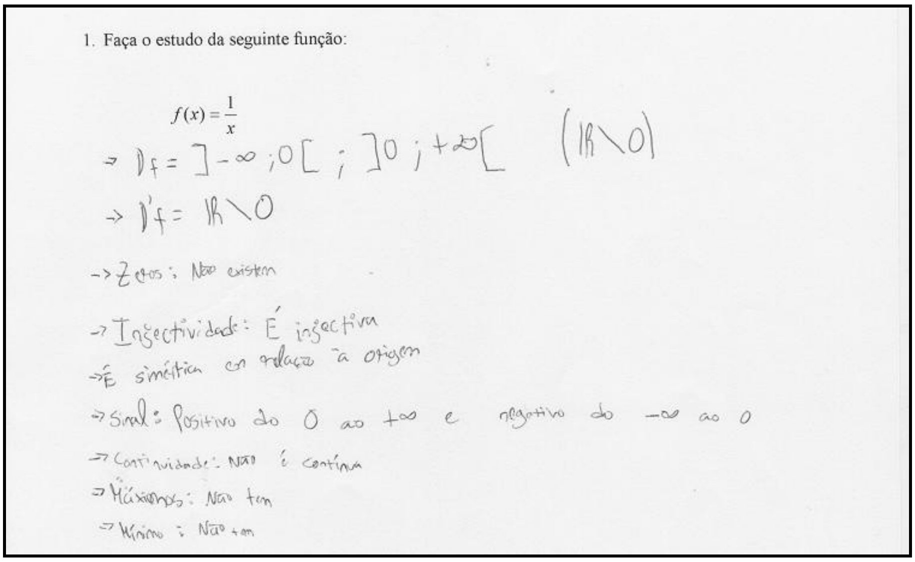


Figura 4 - Resolução da ficha de trabalho 20A - Neusa

O Tiago (Figura 5) indicou o domínio e o contradomínio, que a função não tem zeros, que é injetiva, que não é contínua, que não tem máximos e mínimos, classificou quanto ao sinal, mas apresentou bastantes incorreções de linguagem. No domínio escreveu

$\left]-\infty,0\right[;\left]0,+\infty\right[$ $(IR\setminus 0)$, esquecendo o sinal de reunião entre intervalos. No contradomínio, à semelhança do que fez para o domínio, escreveu $IR\setminus 0$, colocando ao mesmo nível conjunto e elemento. Na análise de sinal escreve "positivo de 0 ao $+\infty$ e negativo de $-\infty$ ao 0", evitando a notação matemática, se bem que como indica não esteja incorreto. No estudo da paridade, escreve que a função é simétrica em relação à origem, mas esquece-se de a classificar. O Tiago fez um estudo não apoiado nas definições e não justificado.



1. Faça o estudo da seguinte função:

$f(x)=\frac{1}{x}$

→ $D_f =]-\infty ;0[\; ; \;]0 ; +\infty[$ $(IR\setminus 0)$

→ $D'_f = IR\setminus 0$

→ Zeros: Não existem

→ Injectividade: É injectiva

→ É simétrica em relação à origem

→ Sinal: Positivo do 0 ao $+\infty$ e negativo do $-\infty$ ao 0

→ Continuidade: Não é contínua

→ Máximos: Não tem

→ Mínimo: Não tem

Figura 5 - Resolução da ficha de trabalho 20A - Tiago

4.2.3. Trabalho para casa

Este trabalho de casa, que consistia no estudo das funções f definida por $f(x)=\frac{3}{x}$, $x\neq 0$, e g definida por $g(x)=-\frac{2}{x}$, $x\neq 0$, foi solicitado após o primeiro bloco de aulas dedicado às Funções Racionais. Dezasseis alunos apresentaram no dia seguinte o estudo solicitado. Com esta tarefa, pretendia-se que os alunos consolidassem conhecimentos, verificassem quais os conhecimentos que tinham realmente adquirido, quais as dúvidas com que se deparavam, ao mesmo tempo que permitia ao professor rever as aprendizagens para melhor poder orientar o seu plano de aula.

Analisando os trabalhos de casa, verifica-se que, regra geral, os alunos seguiram um esquema de análise idêntico ao adoptado na aula com o estudo da função f definida por $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, como se tratasse de uma *check list* e classificaram de forma muito sucinta as funções, sem recorrer às definições, quando aplicável. As justificações apresentadas por seis alunos permitem mais facilmente aferir sobre a compreensão dos conceitos e, ao tentarem justificar, conseguem-se aperceber das dificuldades com que eventualmente se podiam debater. Também aqui se notam algumas fragilidades em termos dos conceitos que se mostraram de mais difícil compreensão em sala de aula. O uso da calculadora gráfica foi generalizado. A Neusa não apresentou o trabalho de casa.

Uma aluna, no estudo da segunda função, registou apenas as diferenças encontradas, o que parece mostrar que as identificou, mas, ao não registar conclusões, não permite avaliar se compreendeu o porquê. Um único aluno não utilizou calculadora gráfica e representou a função como uma recta. Isto pode levar a crer que a expressão analítica de uma Função Afim e de uma Função Racional não estará bem interiorizada, ao mesmo tempo que não consegue fazer a tradução entre representações. Este facto é ainda mais difícil de entender, quando ocorre logo após uma aula na qual se estudou uma função em tudo semelhante e em que as representações analítica e gráfica estiveram sempre patentes. Um outro aluno terá interiorizado que os gráficos das funções seriam “simétricos”, pelo facto de uma ter sinal negativo e a outra ter sinal positivo, terá tentado seguir o esquema da aula, mas fez uma grande confusão entre positivo e negativo, crescente e decrescente, par e ímpar. Um aluno aproveitou para tirar conclusões sobre o que leva à diferenciação em algumas das características das duas funções, conclusões essas que lhe permitem compreender melhor as funções e consolidar os conhecimentos adquiridos. As conclusões são referidas tanto à expressão analítica das funções, quando refere por exemplo o sinal negativo, como à representação gráfica, quando refere o posicionamento das funções nos quadrantes ou a rotação de uma para originar a outra.

No estudo da função f definida por $f(x)=\frac{3}{x}$, $x \neq 0$, o Lourenço (Figura 6) indicou o domínio e o contradomínio da função e enunciou de forma muito sucinta, sem recorrer às definições, que a função não tem zeros, é injetiva, é ímpar, é contínua. Na monotonia usou corretamente a expressão “e em” entre intervalos de domínio, mas disse que a função é crescente em cada um dos intervalos, o que mostra que este conceito não está interiorizado. Apenas indicou a assíntota vertical. Para a função g definida por

$g(x) = -\frac{2}{x}$, $x \neq 0$, referiu que é igual à anterior, não verificando a influência do sinal negativo. O Lourenço fez um estudo em que lista as características da função, mas não se apoia nas definições e não justifica, sendo difícil confirmar o que ficou realmente apreendido e o que são dificuldades.

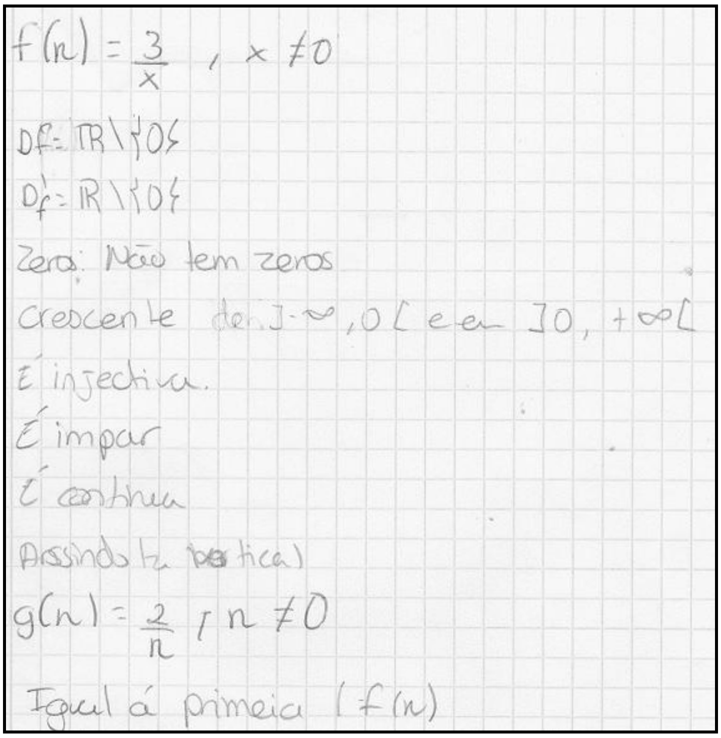
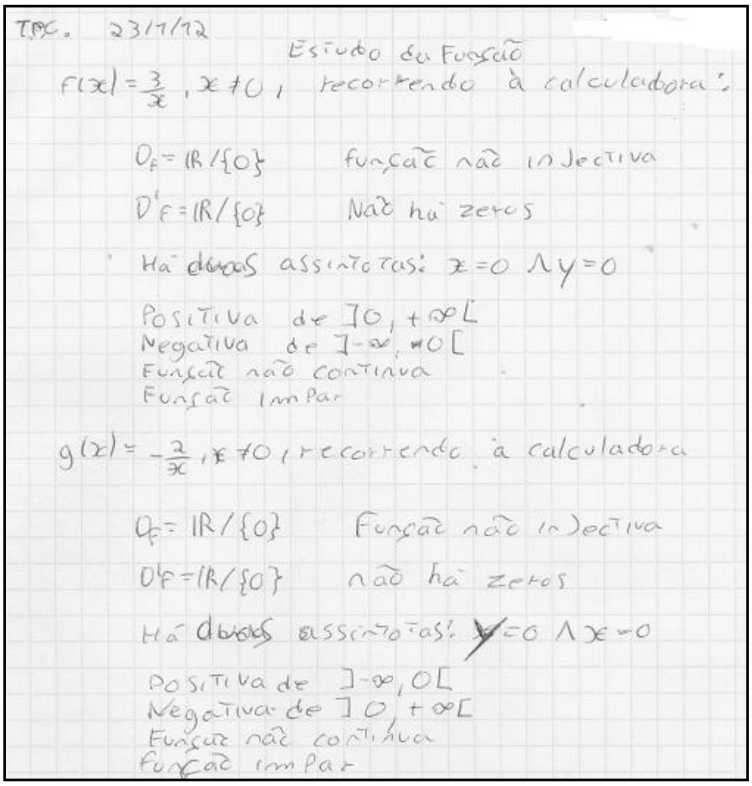


Figura 6 – Resolução de TPC - Lourenço

O Miguel (Figura 7) indicou o domínio e o contradomínio das funções, que as funções não têm zeros, que são ímpares, caracterizou quanto ao sinal e referiu as assíntotas vertical e horizontal, se bem que não diz qual é qual. Na injetividade escreveu que as funções não são injetivas e na continuidade que não são contínuas, evidenciando que estes conceitos não foram realmente apreendidos em sala de aula. Tal como o Lourenço, lista as características das funções, não se apoia nas definições, nem justifica, tornando difícil aferir todas as reais dificuldades.



TPC. 23/1/12

Estudo da Função

$f(x) = \frac{3}{x}$, $x \neq 0$, recorrendo à calculadora:

$D_f = IR/\{0\}$ função não injectiva

$D'_f = IR/\{0\}$ Não há zeros

Há duas assintotas: $x=0 \wedge y=0$

Positiva de $]0, +\infty[$

Negativa de $]-\infty, 0[$

Função não continua

Função impar

$g(x) = -\frac{2}{x}$, $x \neq 0$, recorrendo à calculadora

$D_f = IR/\{0\}$ Função não injectiva

$D'_f = IR/\{0\}$ não há zeros

Há duas assintotas: $y=0 \wedge x=0$

Positiva de $]-\infty, 0[$

Negativa de $]0, +\infty[$

Função não continua

função impar

Figura 7 – Resolução de TPC - Miguel

O Tiago (Figura 8) indicou o domínio e o contradomínio das funções, diz que as funções não têm zeros, que não têm máximos, nem mínimos e que são injetivas. Na paridade, apenas diz que são simétricas em relação à origem, mas não as classifica. Carateriza em termos de sinal, identifica os quatro limites e as assíntotas verticais e horizontais. Na continuidade, diz apenas que são contínuas, evitando escrever a definição. Este é mais um caso de uma lista de características, sem justificações nem definições, o que complica a percepção das dificuldades de compreensão do aluno.

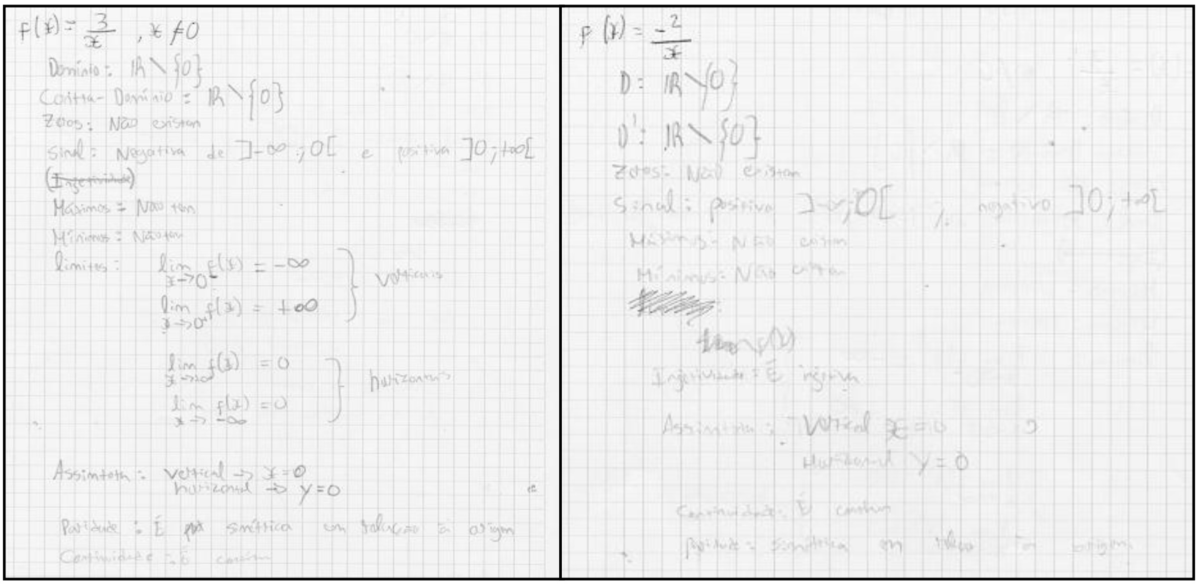


Figura 8 – Resolução do TPC - Tiago

4.2.4. Ficha de trabalho nº 21A (Anexo 3)

Esta ficha de trabalho foi distribuída na segunda parte do segundo bloco lecionado sobre Funções Racionais e compunha-se de duas parcelas. Na primeira, pretendia-se que os alunos fizessem a correspondência entre a expressão analítica e a representação gráfica de funções definidas por $f(x)=\dfrac{a}{x+b}$, $a\neq 0$ e $x+b\neq 0$, sem recorrer à utilização da calculadora, justificada por um texto matemático. Na segunda, era pedido o estudo dessas funções. Tinha por objetivo compreender com que facilidade os alunos aplicavam (implicitamente) as transformações aos gráficos de funções, conseguindo compreender o efeito dos parâmetros a e b e as consequências da mudança desses parâmetros, como faziam a correspondência entre duas representações de funções (analítica e gráfica) e como conseguiam aplicar os conhecimentos entretanto adquiridos ao estudo de outras Funções Racionais, bem como que reificassem conceitos já interiorizados.

A primeira tarefa foi resolvida em sala de aula e decorreu sem grandes problemas para a maioria dos alunos, se bem que muitos não se sentiam nem à vontade nem com disposição para elaborar um texto justificativo e por isso não o fizeram. A segunda tarefa foi para trabalho de casa, sendo corrigida na aula seguinte. Na realidade, a maior parte dos alunos acabou por efetuá-la em sala de aula, após terem sido de novo trabalhadas as noções de continuidade, limites e assíntotas que estavam a originar alguns constrangimentos.

Como já referido por observação das aulas, o Miguel, a Neusa e o Tiago relembraram com alguma facilidade os conceitos estudados no 10º ano relativamente às transformações e aplicaram-nos às funções em estudo, sendo inicialmente não tão evidente para o Tiago. O Lourenço evidenciou que os conteúdos do ano anterior respeitantes às transformações necessitavam de ser relembrados, trabalhados e consolidados, de modo que a sua aplicação às Funções Racionais não foi evidente.

O Lourenço, o Miguel e o Tiago não efectuaram o estudo das funções em casa. Em sala de aula, o Miguel realizou o estudo de uma das funções sem grandes problemas, tendo-se enganado apenas na classificação quanto à paridade, fruto de alguma precipitação, e conseguiu defini-la claramente em termos de continuidade e assíntotas. O Lourenço foi acompanhando a resolução, mas, mercê das hesitações que ainda revela, dificilmente concluiria um estudo de uma função autonomamente. O Tiago, depois que viu esclarecidas as suas dúvidas em sala de aula, já conseguiria realizar esse estudo. A Neusa efetuou o trabalho de casa e não revelou dificuldades.

4.2.5. Ficha de trabalho nº22A (Anexo 4)

Esta ficha de trabalho foi distribuída no quarto bloco em que se estudaram as Funções Racionais. Nela era solicitada a descrição da sequência de transformações que permitiam ir de uma Função Racional definida por $f(x)=\frac{a}{x}$, $x\neq 0$ e $a\neq 0$, a outra definida por $f(x)=c+\frac{a}{x+b}$, $x+b\neq 0$, a determinação de algumas características das funções (domínio, contradomínio, assíntotas, coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos) e a sua representação gráfica, sem recorrer à utilização da calculadora gráfica. Tinha por objetivo compreender qual a facilidade com que os alunos aplicavam as transformações ao gráfico de funções, como aplicavam os conhecimentos adquiridos ao estudo de outras Funções Racionais e como conseguiam utilizar as características e traduzi-las numa representação gráfica, bem como a consolidação de conceitos.

O Lourenço teve dificuldade em identificar todas as transformações sofridas pela transformavam uma função nas outras, identificou o domínio e as assíntotas, mas não conseguiu concluir a tarefa em sala de aula. O Miguel começou por definir as características das funções e representá-las graficamente e não chegou a definir as transformações. A Neusa não levantou questões relativamente à resolução desta ficha. O Tiago realizou o solicitado, mas não concluiu a representação gráfica.

4.3. Testes de avaliação sumativa

4.3.1. Teste de avaliação sumativa Novembro de 2011

No teste de avaliação de Novembro, resolvido por vinte e quatro alunos da turma A, foram apresentadas três questões relacionadas com funções.

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.

Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

(A) $\frac{\pi}{9}$ **(B)** $\frac{2\pi}{9}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $\frac{4\pi}{3}$

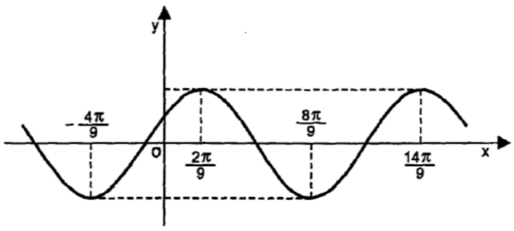


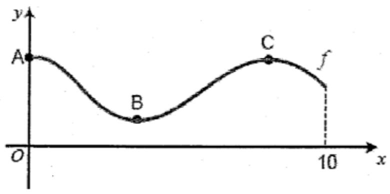
Figura 9 – Questão 2 de escolha múltipla do teste avaliação de novembro 2011

Na primeira questão (Figura 9), de escolha múltipla, na qual se pedia, através da leitura de um gráfico, para indicar qual o período da função, quinze alunos apresentaram a resposta correta. Pelo contrário, o Lourenço e o Tiago não o fizeram, não havendo dados que permitam uma análise do seu raciocínio por se tratar de uma questão de escolha múltipla.

4. Considere a função f, real de variável real, de domínio [0, 10], definida por

$$f(x) = 18 - 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

cujo gráfico se encontra representado na figura ao lado.



(Utilize métodos **exclusivamente analíticos** para resolver as duas alíneas seguintes)

4.1. Mostre que o contradomínio da função f é o conjunto [13, 23].

4.2. Determine as coordenadas dos pontos A, B e C.

Figura 10 - Questão 4 de desenvolvimento do teste avaliação de novembro 2011

Na segunda questão (Figura 10) era pedido, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, o contradomínio de uma função representada graficamente e que fossem determinadas as coordenadas de três pontos.

Em relação ao contradomínio, a grande dificuldade prendeu-se com o enquadramento da função seno. Dos quatro alunos, o Miguel, a Neusa e o Tiago conseguiram confirmar o contradomínio.

Regra geral, olhando para o gráfico, a maioria dos alunos compreendeu que os pontos pedidos eram extremos da função, mas tiveram alguma dificuldade em resolver uma equação que envolvia a função seno. O Lourenço indicou as coordenadas do ponto A, pois sabendo que a abcissa tinha o valor zero, calculou o valor da ordenada. Conseguiu ainda identificar algumas das coordenadas dos outros dois pontos. O Miguel indicou as coordenadas do ponto A, usando um esquema semelhante ao do Lourenço, mas já para os outros dois pontos só conseguiu indicar a ordenada, pois, ao tentar calcular o valor da abcissa usou valores aproximados e enganou-se. O Tiago identificou os extremos, calculou o valor das ordenadas dos três pontos, mas depois trocou abcissas com ordenadas, querendo calcular $f(y)$ em vez de $f(x)$. A Neusa indicou as coordenadas do ponto A, sabendo os valores máximo e mínimo que a função seno pode tomar, calculou os correspondentes valores da função e identificou-as como sendo as ordenadas dos pontos B e C. Recorrendo, novamente, aos valores máximo e mínimo que a função seno pode tomar, calculou o valor de x.

6. Num determinado porto marítimo, em certo dia, a altura da maré, M, em metros, relativamente ao fundo do mar, foi dada em função do tempo, t, em horas, pela expressão:

$$M(t) = 12 + 7\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right),\ t \in [0, 24]$$

6.1. Recorrendo à calculadora gráfica, esboce o gráfico desta função.

6.2. Indique os intervalos de tempo em que a maré desceu.

6.3. A que horas se deu a maré alta? Qual o nível da água do mar nesse momento?

6.4. Um navio necessita de pelo menos 8 metros de profundidade para poder atracar em segurança neste porto. Neste dia, durante quanto tempo este navio não pode estar atracado neste porto?
Resolva este item recorrendo à calculadora gráfica. Apresente um esboço do(s) gráfico(s) considerado(s) na resolução. Apresente o resultado aproximado às centésimas.

Figura 11 - Questão 6 de desenvolvimento do teste avaliação de novembro 2011

Na terceira questão (Figura 11) era solicitado o recurso à calculadora para o estudo de uma função que modelava uma situação real, a altura das marés num porto em função do tempo, representada através de uma função cosseno.

A transposição da função do ecrã da calculadora para o papel apresentou deficiências e foi muitas vezes pouco cuidada. A interpretação da função, quer através da expressão analítica, quer através do gráfico, também se mostrou deficitária. Por exemplo, na última alínea, os alunos traçaram uma recta de equação $y = 8$ (profundidade mínima para o barco atracar), verificando graficamente que essa recta intersectava o gráfico da função. No entanto, não conseguiram explicar o que essas intersecções representavam. Só dois alunos calcularam o período de tempo em que o barco não podia estar atracado no porto, tendo oito alunos concluído a resposta com a indicação do intervalo em que o nível das águas do mar esteve abaixo dos 8 m.

O Lourenço conseguiu fazer uma transposição razoável do gráfico da calculadora para o papel. Por outro lado, conseguiu apenas indicar um dos intervalos em que a maré desceu, a que horas se deu a maré alta, sem indicar qual o nível nessa altura e não chegou a apresentar a resposta à última alínea.

O Miguel escolheu uma boa janela de visualização para o gráfico, definiu bem o domínio e o contradomínio e o máximo no intervalo pretendido. Não identificou os eixos e apresentou uma incorreção no minimizante. Mas apresentou todas as respostas corretas.

O gráfico desenhado pelo Tiago tinha uma apresentação pouco cuidada com uma definição incompleta dos eixos. A janela de visualização na calculadora deve ter sido mal escolhida, já que não conseguiu abranger todo o domínio, todo o contradomínio, nem indicar o máximo. Indicou apenas um dos intervalos em que a maré desceu, a que horas aconteceu a maré alta e qual o nível atingido. Na última alínea, acrescentou a recta, determinou a intersecção, mas não deu valores aproximados às centésimas e não calculou o período de tempo em que o barco podia estar atracado.

A Neusa tinha um gráfico com apresentação cuidada, escolheu uma boa janela de visualização, definiu bem o domínio e o contradomínio e o máximo no intervalo pretendido, indicou os intervalos em que a maré desceu, a que horas se deu a maré alta, sem indicar qual o nível da água nessa altura. Na última alínea, acrescentou a recta, determinou a intersecção, mas não calculou o período de tempo em que o barco podia estar atracado.

Neste teste de avaliação os alunos obtiveram em média, nas perguntas relacionadas com Funções Trigonométricas, 60% da classificação total. No caso dos quatro alunos da amostra essas percentagens foram de 40%, 84%, 92% e 40%, respectivamente, para o Lourenço, Miguel, Neusa e Tiago.

4.3.2. Teste intermédio Fevereiro de 2012

No teste intermédio de fevereiro foram colocadas duas questões, uma de escolha múltipla e outra de desenvolvimento relacionadas com o tema das Funções Racionais, que tinha sido recentemente introduzido. Na questão de escolha múltipla (Figuras 12 e 13), pretendia-se indicar qual a constante que adicionada a uma função f, representada no gráfico, a transformava numa função g, conhecendo as assíntotas da função f e sabendo que a função g não tinha zeros. Na questão de desenvolvimento (Figura 14 e 15), era dada a representação gráfico de uma função f, onde se identificava o ponto de intersecção com o eixo Ox e as assíntotas vertical e horizontal. Era pedido o contradomínio, o intervalo em que $f(x) \leq 0$ e a expressão analítica da função.

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f

As retas de equações $x = 2$ e $y = 1$ são as assíntotas do gráfico da função f

Para um certo número real k, a função g, definida por $g(x) = f(x) + k$, não tem zeros.

Qual é o valor de k ?

(A) -1

(B) 1

(C) -2

(D) 2

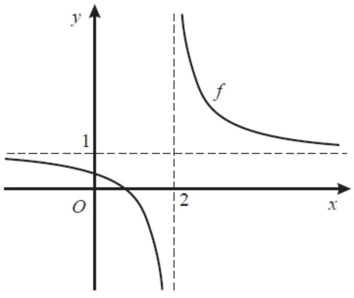


Figura 1

Figura 12 – Versão I – Grupo I.3 do Teste intermédio

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f

As retas de equações $x = 1$ e $y = 2$ são as assíntotas do gráfico da função f

Para um certo número real k, a função g, definida por $g(x) = f(x) + k$, não tem zeros.

Qual é o valor de k ?

(A) -1

(B) 1

(C) -2

(D) 2

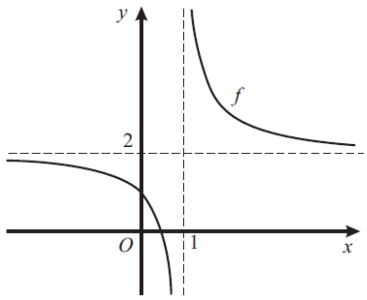


Figura 1

Figura 13 - Versão 2 - Grupo I. 3 do Teste intermédio

1. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f

O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1

As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são as assíntotas do gráfico da função f

1.1. Responda aos dois itens seguintes sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

1.1.1. Indique o contradomínio da função f

1.1.2. Apresente, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$

1.2. Defina, por uma expressão analítica, a função f

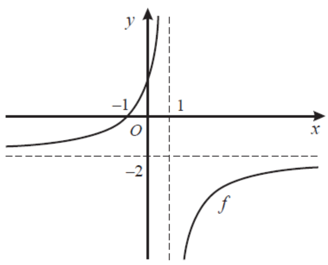
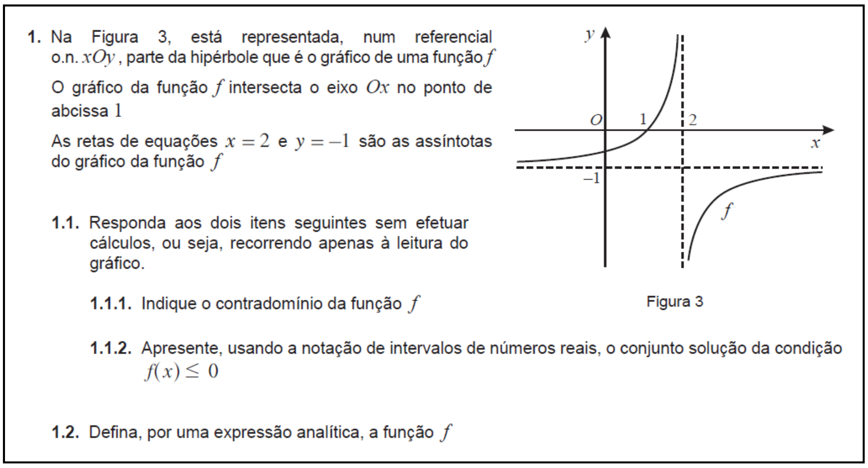


Figura 3

Figura 14 - Versão 1 – Grupo II.1 do Teste intermédio



1. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f

O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 1

As retas de equações $x = 2$ e $y = -1$ são as assíntotas do gráfico da função f

1.1. Responda aos dois itens seguintes sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

1.1.1. Indique o contradomínio da função f

1.1.2. Apresente, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$

1.2. Defina, por uma expressão analítica, a função f

Figura 15 - Versão 2 - Grupo II.1 do Teste intermédio

Para responder corretamente à questão de escolha múltipla, é necessário compreender o que são os zeros da função e que a soma de uma constante faz com que o gráfico sofra uma translação vertical. Qualquer um destes conceitos, já introduzido no ano anterior, foi revisitado aquando do estudo das Funções Racionais. Como não é visível o raciocínio dos alunos, não é possível aferir se o facto da resposta estar correta ou incorreta é resultado da compreensão dos conceitos, de um erro, de sorte,…

Neste teste de avaliação os alunos obtiveram em média, nas perguntas relacionadas com Funções Racionais, 68% da classificação total. No caso dos quatro alunos da amostra essas percentagens foram de 38%, 63%, 100% e 93%, respectivamente, para o Lourenço, Miguel, Neusa e Tiago.

O Lourenço (Figura 16) falhou na questão de escolha múltipla. Na questão de desenvolvimento definiu corretamente o contradomínio $IR \setminus \{-2\}$, mas não conseguiu identificar onde a função tomava valores negativos; apesar de se perceber que começa a definir o primeiro intervalo, incluindo um valor de x (num intervalo fechado) que corresponde a uma assíntota vertical. Conseguiu colocar os valores das assíntotas na expressão, mas não retirou do gráfico o ponto que lhe permitia calcular o coeficiente que faltava.

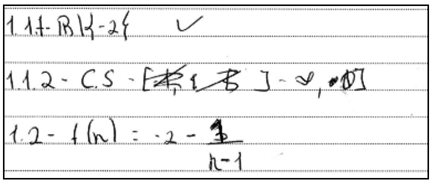


Figura 16 – Resolução da questão 1 de desenvolvimento do TI - Lourenço

O Miguel (Figura 17) conseguiu definir corretamente o contradomínio, não conseguiu identificar onde a função tomava valores negativos; pois em vez de fazer a leitura no eixo dos xx, fez no eixo dos yy e apresenta uma expressão analítica correta, mas não se sabe como lá chegou pois não evidenciou os passos que efetuou.

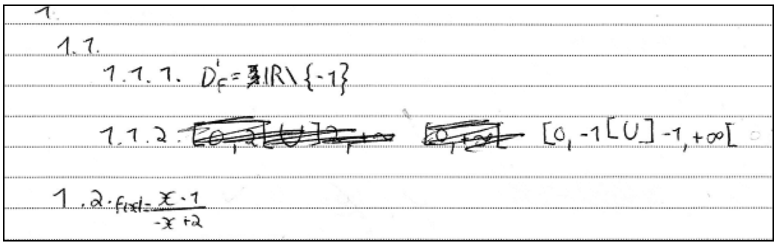

1.
1.1.
1.1.1. $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
1.1.2. $\cancel{[0,2[\cup]2,+\infty}$ $\cancel{[0,+\infty[}$ $[0,-1[\cup]-1,+\infty[$
1.2. $f(x) = \frac{x-1}{-x+2}$

Figura 17 – Resolução da questão 1 de desenvolvimento do TI – Miguel

A Neusa (Figura 18) apresenta todas as respostas certas e justifica todos os passos para a determinação da expressão analítica.

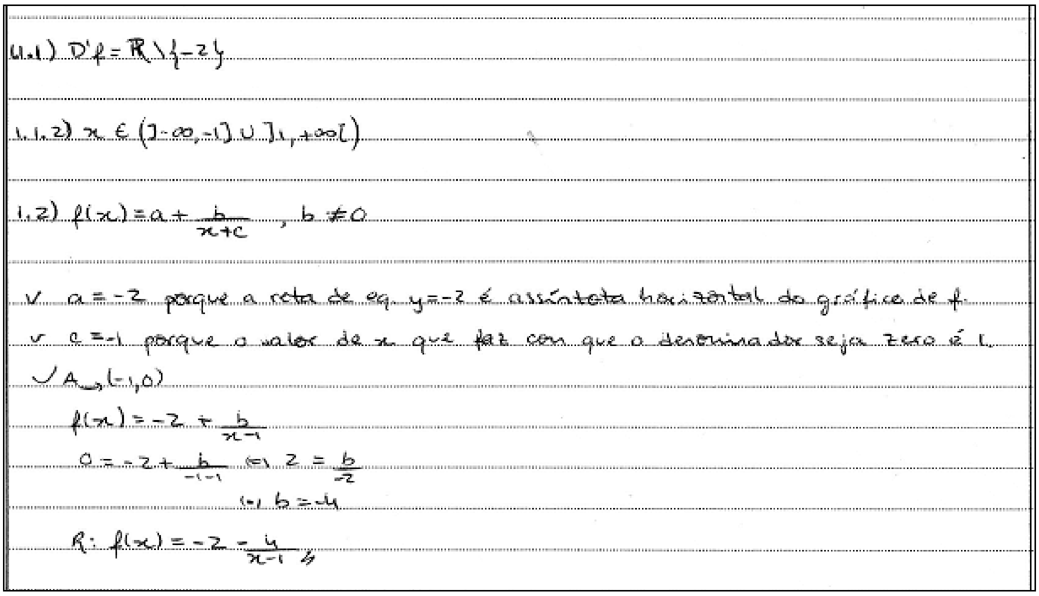
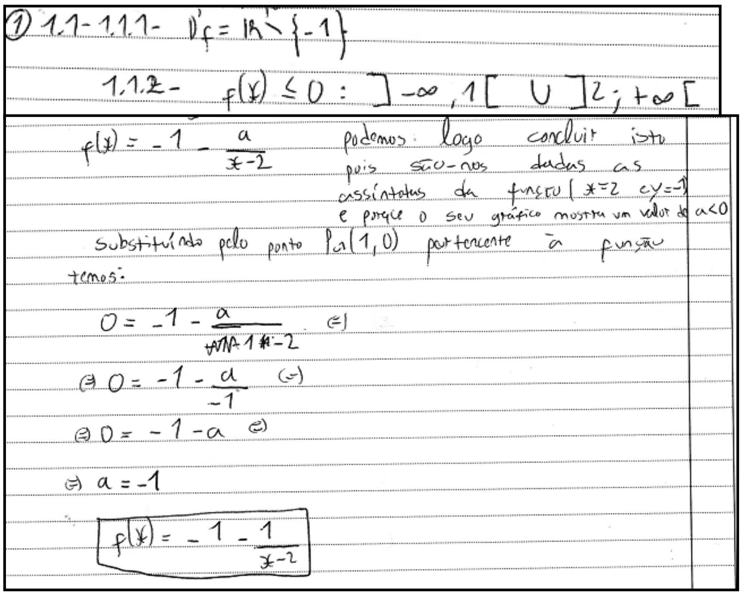

1.1.1) $D'f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
1.1.2) $x \in (]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$
1.2) $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$, $b \neq 0$
✓ $a = -2$ porque a reta de eq. $y=-2$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
✓ $c=-1$ porque o valor de x que faz com que o denominador seja zero é 1.
✓ $A(-1,0)$
$f(x) = -2 + \frac{b}{x-1}$
$0 = -2 + \frac{b}{-1-1} \Leftrightarrow 2 = \frac{b}{-2}$
$\Leftrightarrow b = -4$
R: $f(x) = -2 - \frac{4}{x-1}$

Figura 18 - Resolução da questão 1 de desenvolvimento do TI - Neusa

O Tiago (Figura 19) apresenta o contradomínio bem definido e os intervalos com dois extremos incorretos. A partir do gráfico, consegue ler as assíntotas e o ponto fazendo a correta transposição para a expressão analítica.



① 1.1- 1.1.1- $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1.1.2- $f(x) \leq 0 : \left]-\infty, 1\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$

$f(x) = -1 - \frac{a}{x-2}$ podemos logo concluir isto pois são-nos dadas as assíntotas da função ($x=2$ e $y=-1$) e porque o seu gráfico mostra um valor de $a<0$

Substituindo pelo ponto $P(1,0)$ pertencente à função temos:

$0 = -1 - \frac{a}{1-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = -1 - \frac{a}{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = -1 - a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = -1$

$\boxed{f(x) = -1 - \frac{1}{x-2}}$

Figura 19 - Resolução da questão 1 de desenvolvimento do TI – Tiago

4.4. Entrevistas

Maio de 2012

Foram feitas entrevistas aos quatro alunos escolhidos para amostra da turma, as quais tiveram por base um guião (Anexo 5). Ao escrever o guião a investigadora teve presente que o objetivo desta conversa era obter resposta para as questões:

- Qual é o conceito que os alunos têm de função?
- Quais as representações que privilegiam para identificar o conceito?
- Que processos utilizam na tradução entre as diferentes representações de funções?

Era importante acompanhar as respostas, de modo a obter o maior número possível de dados.

A conversa teve lugar em dias distintos. Algumas das questões foram retomadas e a investigadora mostrou as notas tiradas na entrevista anterior para que os alunos confirmassem, corrigindo por escrito, o que anteriormente tinham respondido.

Não foi muito fácil proceder a estas entrevistas, porque os alunos não tinham muita disponibilidade. Assim, as entrevistas tiveram de ser levadas a cabo durante as horas letivas de Matemática, minimizando o tempo que se ausentavam da sala de aula.

Cinco das questões que faziam parte desse guião foram colocadas aos restantes alunos da turma e foram recolhidas as suas respostas.

Na primeira questão pretende-se que o aluno explique o que para si é função, palavra que já integra o seu vocabulário matemático há muitos anos.

> Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se aplicação de A em B toda a correspondência unívoca entre A e B. Em vez de “aplicação de A em B” também se pode dizer “função definida em A com valores de B”.
>
> Assim, definir uma função f em A com valores em B (ou uma aplicação de A em B) é dar um processo qualquer pelo qual, a cada elemento x de A, fique a corresponder um e um só elemento y de B. Este é chamado valor da função f em x ou ainda imagem (ou transformado) de x por f. (Sebastião e Silva, 1975, pp. 174-175)

A palavra função aparece para a maioria dos alunos relacionada com a definição de correspondência entre duas entidades, objetos e imagens, x e y. Alguns referem que essa correspondência pode ser representada de uma forma analítica, como uma fórmula com incógnita, uma expressão com variáveis, uma equação com incógnita, conta com incógnita, termo,… De uma perspectiva gráfica, também se referem à função como um gráfico ou como um diagrama de Venn. Para alguns a função aparece associada a algo com aplicação no dia-a-dia. A tentativa, que lhes foi solicitada, para explicar a alguém oralmente e apenas por palavras o que é uma função não parece ter sido muito eficaz, quer em termos de linguagem matemática, quer em termos de linguagem mais coloquial. Dificilmente quem não tem a noção de função viria a apreendê-la. Este facto pode também prender-se com a dificuldade de comunicação escrita e oral que grande parte dos alunos manifesta.

Regra geral, todos os alunos conseguiram indicar vários tipos de funções (afim, quadrática. cúbica, constante, polinomial, definida por ramos, módulo, trigonométrica, racional, irracional, inversa, derivada, sucessão). Na tentativa de associar as funções a uma situação real, muitos alunos limitaram-se a associar os tipos de funções a expressões analíticas. No entanto, alguns conseguiram fazer a relação pedida e destes a maioria foi buscar associações à Física.

Quanto às formas de representação, a maioria dos alunos referiu-se à gráfica e analítica, sendo as preferências nalguns casos pela analítica, se bem que por vezes dependa do tipo de função e do que lhes é solicitado. Se a exigência passa por traçar o gráfico da função, o rigor que se pretende que tenham não se coaduna com o que estão dispostos a imprimir na tarefa.

Debruçando-me mais em detalhe nos quatro alunos:

O Lourenço mostrou-se disponível por participar no estudo, mas de certa forma receoso pela possibilidade de se virem a evidenciar as limitações que ele considera que tem face aos outros colegas (“as minhas respostas vão ser as piores”). No entanto, implicou-se na entrevista e fez o possível por responder ao que lhe era solicitado, nunca mostrando má vontade.

Na primeira entrevista, o Lourenço tentou reproduzir uma definição de função baseada numa correspondência, dizendo que ”é onde cada objeto tem uma só imagem”. Também associou ao aspecto gráfico, desenhando, num referencial cartesiano, (Figura 20) uma função que identificou como quadrática.

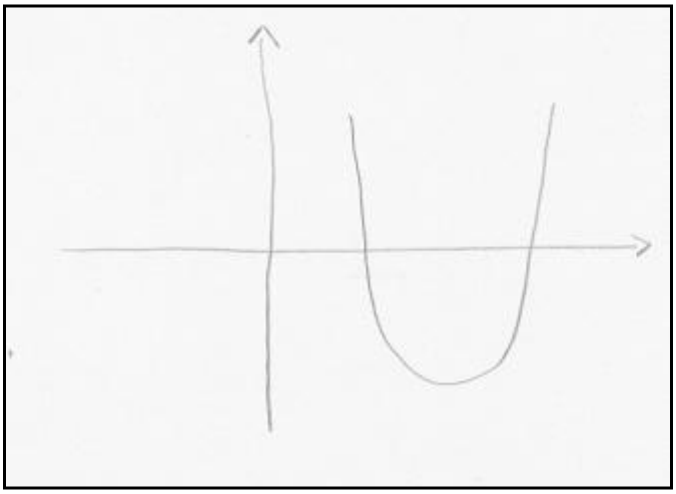


Figura 20 – Função Quadrática desenhada por Lourenço

Na tentativa de explicar a alguém por telefone o que é uma função, manteve a ideia de correspondência, expressando que ”um objeto é um número e a imagem é outro número e há sempre uma correspondência entre eles”, mas que em situações de problema podem não ser números. Mais tarde, acrescentou que as funções são limitadas por maximizantes e minimizantes.

Soube indicar alguns tipos de funções (quadrática, afim, cúbica, definida por ramos, racional, irracional, derivada, inversa, sucessão), mas teve dúvidas se a função irracional, que fez parte das que enumerou, seria função. Conseguiu associar os dois primeiros tipos de função a uma representação gráfica.

Como exemplo de uma situação real e com receio de fazer má figura, tentou lembrar-se de um problema que tinha visto:

> A Ana e a … (um nome qualquer) foram beber chá. O que se quer saber é a que temperatura é que o chá pode ser bebido.
>
> A temperatura é em função dos minutos. A temperatura pode estar entre 30ºC e 50ºC.

Inicialmente, escreveu uma expressão de memória ($T^2 - 24T + 15$), mas que o confundiu, porque não conseguiu explicar se T era a temperatura ou o tempo. Dando uma pequena ajuda, a investigadora perguntou-lhe o que ele queria determinar. O Lourenço respondeu que era a temperatura. A investigadora então disse-lhe "É a temperatura em função de… ?" E o Lourenço corrigiu a expressão para $T(m) = m^2 - 24m + 15$.

No dia seguinte, continuou a situação e começou por calcular a temperatura ao fim de um minuto com a expressão que tinha indicado. Como o resultado lhe ia dar uma temperatura negativa e não lhe fazia sentido, alterou a expressão e recalculou da seguinte forma:

> temperatura após 1 minuto
>
> $t(1) = 12 - 24(1) + 15$
>
> $T(m) = m^2 - 24m + 60$
>
> $t(1) = 12 - 24(1) + 60$
>
> $\quad = 37°C$

Como formas de representar uma função, referiu apenas a gráfica e a analítica e exemplificou esta última através da expressão $t^2 - 24t + 24$.

O Miguel acedeu de boa vontade a participar no estudo e não levantou problemas às tarefas que lhe foram sendo solicitadas, se bem que, pelo vagar com que as efetuou, acabou por evitar responder àquelas que considerava que lhe davam mais trabalho.

No seu modo habitualmente sucinto, definiu função, um misto de gráfica com analítica, dizendo que "função é um conjunto de pontos definido por uma equação, normalmente com uma incógnita." Mais tarde, reforçou a parte gráfica, acrescentando que faria um esquema ou um desenho.

Se lhe fosse pedido para explicar a alguém por telefone (sem imagens) o que é uma função, via se a pessoa sabia o que é um gráfico. Se não, explicava que é "um desenho de uma cruz com uma seta para cima e uma para o lado direito, ou seja, os eixos" e que a função se podia representar nesse gráfico por linhas e que podia apresentar diversas configurações. Salientou a ideia que nem todas as correspondências são funções e explicava como tal facto se podia ver graficamente, isto é, "traçando duas linhas verticalmente essas linhas não podem tocar duas vezes na função". Depois acrescentou que “uma função é um conjunto de pontos definido por uma equação que normalmente tem uma ou duas incógnitas”.

Listou alguns tipos de funções (quadrática, módulo, afim, inversa, derivada, definida por ramos, cúbica) e conseguiu associar a todas elas uma representação gráfica.

Como exemplo de uma situação real associada a uma função, apresentou um problema ligado com algumas semelhanças com a sequência de Fibonacci (tema de um trabalho que estava a preparar) e em que a solução obrigava a uma representação gráfica:

> O senhor Joaquim tem uma coelheira e cada mês nascem 3 coelhos e ele compra 1. De 4 em 4 meses morrem 5 coelhos. Ele tem uma média de 21 coelhos. Em Janeiro o senhor Joaquim tinha 20 coelhos. Tente esboçar o gráfico dos próximos 3 meses.

No segundo dia simplificou o problema da situação real e concluiu com uma simulação de uma representação gráfica (Figura 21):

> O senhor Joaquim tem uma coelheira e cada mês nascem 3 coelhos e ele compra 1. Em Janeiro o senhor Joaquim tinha 20 coelhos. Tente esboçar o gráfico dos próximos 3 meses.

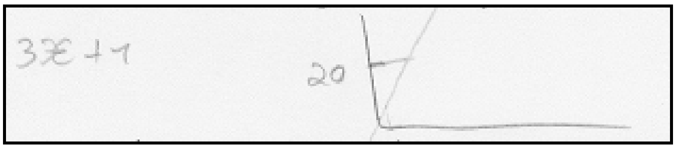


Figura 21 – Representação de um problema - Miguel

Como formas que conhece e que mais utiliza para representar uma função, referiu que depende dos exercícios e que para a Função Quadrática talvez preferisse o gráfico, mas, por outro lado, com a expressão analítica poderia identificar a abertura da concavidade. De qualquer forma, não se esqueceu de salientar que gosta muito de utilizar a calculadora gráfica.

A Neusa acedeu prontamente a participar no estudo. Respondeu e efetuou todas as tarefas que lhe foram sendo pedidas com afinco, como se de uma avaliação se tratasse. No primeiro dia de entrevista, talvez com medo de não estar à altura das expectativas, denotou alguma falta de confiança, fora do habitual. Ficou contente de, no segundo dia, lhe ter sido dada a possibilidade de corrigir algumas afirmações que tinha feito, aproveitando assim por mostrar o que realmente sabe.

Para Neusa uma função apresenta uma conotação de correspondência mas também gráfica, se bem que não tenha conseguido construir uma definição completa:

> Função é um conjunto de pontos dependendo do domínio.
> Pode ser uma reta (uma função afim), quadrática, hipérbole,…
> O domínio e o termo definem a função.

No segundo dia, reforçou a ideia de correspondência e complementou o que havia dito anteriormente:

> Numa função há um conjunto de partida, isto é, os valores que pode tomar, os objetos, e um conjunto de chegada, isto é, os números que y toma em função de x. Para ser uma função a cada objeto só pode corresponder uma e uma só imagem, mas diferentes objetos podem ter a mesma imagem.

Se tivesse que explicar a alguém pelo telefone diria que uma função está relacionada com "uma expressão que tem sempre uma letra que é uma incógnita, que é aquilo que não conhecemos e pontos que são dados pela expressão" e que podia desenhar um gráfico. Acrescentou, ainda, que a situação representada pela expressão pode ter números naturais, relativos,…

Novamente no segundo dia corrigiu, melhorando, o que havia dito anteriormente:

> Uma função é relacionada com uma expressão que tem sempre uma letra que é uma incógnita, que é aquilo que não conhecemos, e conseguimos saber pontos se substituirmos essa letra na expressão por números. Podemos desenhar um gráfico. Temos de ter em conta os números que a situação pode ter: naturais, negativos,…Só pode ser uma função se a cada número que atribuirmos à letra der apenas um e um só ponto.

Referiu vários tipos de funções (afim, quadrática, cúbica, sucessões, módulo, inversa, derivada, racionais e irracionais) e a todos conseguiu associar uma representação gráfica.

Como exemplo de uma situação real associada a uma função, começou por verbalizar um problema de programação linear, que representou sumariamente de forma gráfica e analítica (Figura 22). Identificou a zona de restrição com a função. Depois de a investigadora lhe perguntar como era a representação da Função Afim, acabou por corrigir e dizer que uma função pode ser representada por cada uma das rectas que, no problema de programação linear, limitam a região admissível. Para ela, numa situação real x não pode ser menor que zero (pois refere-se a medidas) e y pode variar entre zero e mais infinito.

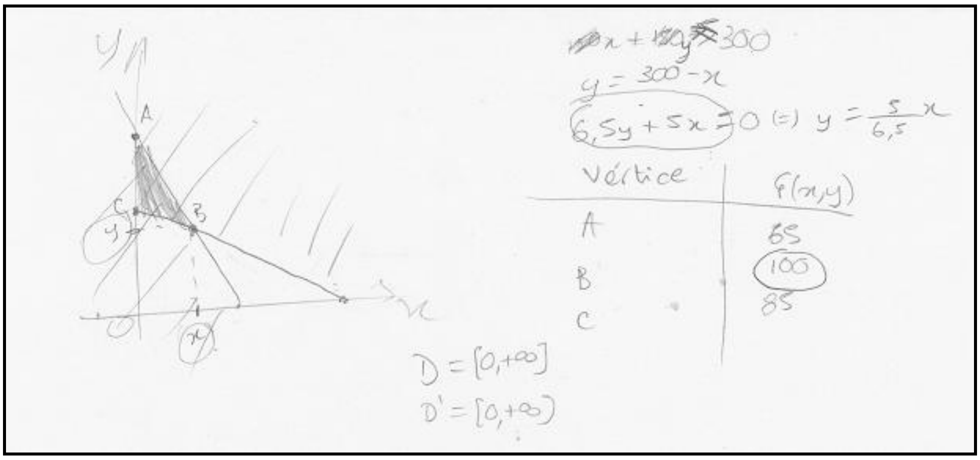


Figura 22 – Problema de situação real - Neusa

Como formas que conhece e que mais utiliza para representar uma função, referiu preferir a analítica, se bem que nalguns casos lhe seja indiferente usar a gráfica ou a analítica.

O Tiago ficou orgulhoso de ter sido escolhido para o estudo, mas quando se viu perante a necessidade de ter de responder a perguntas e de executar algumas tarefas que lhe davam trabalho, mostrou-se menos satisfeito.

Na definição de função, a primeira ideia que vem à memória de Tiago é um diagrama de Venn, que é "aquilo que tem uma bolinha e uma seta". Privilegia a noção de correspondência e diz que função é algo que caracteriza um objeto pela imagem que lhe corresponde, que é uma relação entre duas coisas, normalmente um x e um y, e que está presente no nosso dia-a-dia. Não se esquece de mencionar que, para uma correspondência ser função, cada objeto não pode ter diferentes imagens. Referiu ainda a possibilidade da função ser definida graficamente e deu exemplos de tipos de funções (afim e quadrática, que referiu como parábola).

Se tivesse que explicar a alguém, pelo telefone (sem imagens) o que é uma função, verbalizava-a como uma relação entre objetos:

> Função é uma forma fácil de duas coisas estarem relacionadas. Esta cadeira com esta mesa estão relacionadas. Há coisas que nós relacionamos para podermos aplicar no dia-a-dia como as da velocidade.

Para que fosse entendido pelo cidadão comum, indicou um problema muito básico de uma situação real associada a uma função e mais tarde incluiu a sua expressão analítica:

> Se o menino João é uma pessoa e tem duas bananas, a Maria e a Joana quantas bananas terão?
>
> $y = 2x$ em que y é o número de bananas e x o número de pessoas

Não chegou a responder sobre as formas que conhece e mais utiliza para representar uma função.

As questões que a seguir se descrevem foram apenas colocadas aos quatro alunos da amostra.

Na primeira questão (Figura 23) pedia-se ao aluno que associasse cada uma das cinco representações gráficas de função a cada uma das expressões analíticas de função, justificando a razão da escolha. Neste caso eram exibidas funções do tipo afim, quadrático e racional.

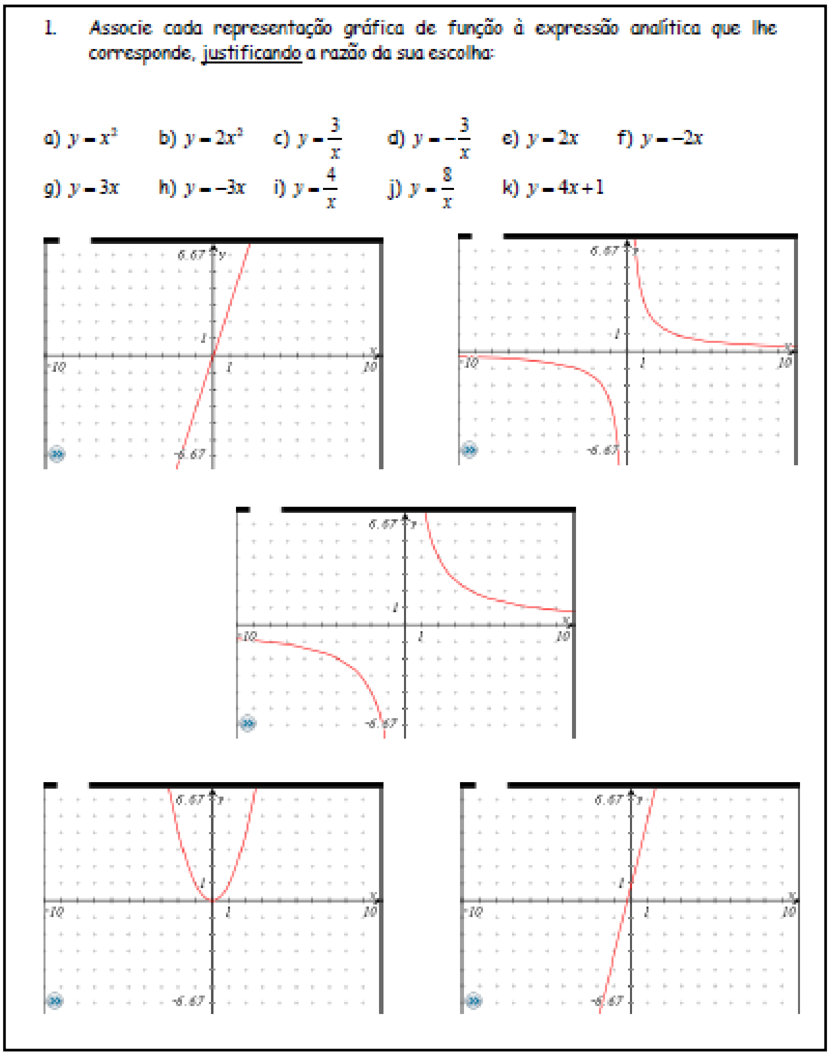


Figura 23 – Questão 1 de entrevista

Os quatro alunos efetuaram esta tarefa corretamente e é perceptível pelos dados evidenciados a forma como o fizeram, mas apenas a Neusa justificou através dum texto.

O Lourenço associou cada tipo de representação analítica e de representação gráfica a um tipo de função. Para cada representação gráfica escreveu o tipo de função que representava e, usando dois pontos, fez a correspondência adequada com uma representação algébrica.

O Miguel associou cada tipo de representação analítica e de representação gráfica a um tipo de função e, em cada tipo de função, fez a correspondência adequada entre as representações analítica e gráfica. Na Função Afim que passa pela origem do referencial, identificou-a pelo declive. Na outra Função Afim, identificou-a pela ordenada na origem e por um ponto. Na Função Quadrática, identificou-a por dois pontos. Nas Funções Racionais, identificou-as uma por um ponto e outra por dois pontos.

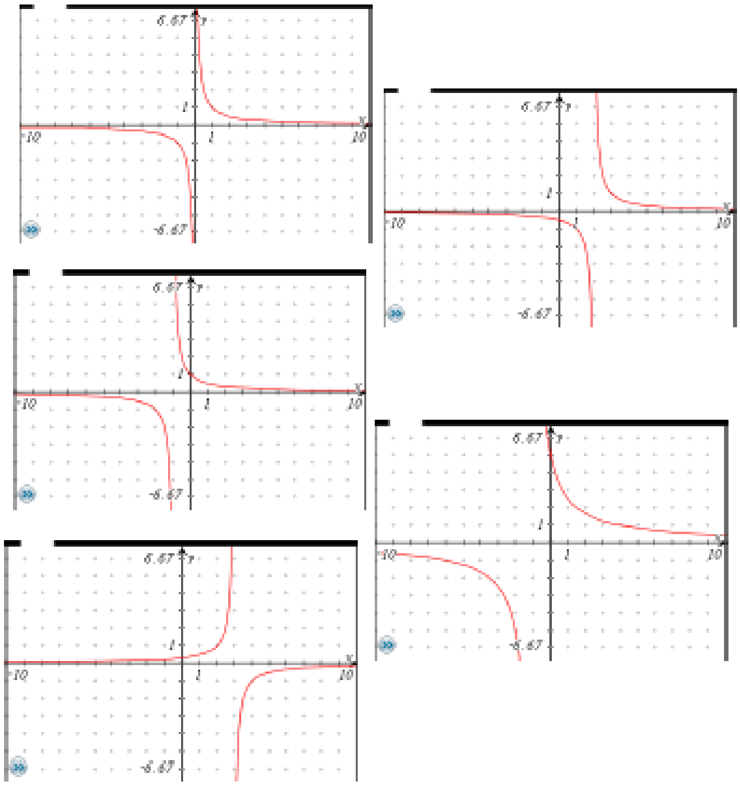
A Neusa associou cada tipo de representação analítica e de representação gráfica a um tipo de função e dentro de cada tipo de função, usou dois pontos para fazer a correspondência adequada, excepto na Função Afim com ordenada na origem 1, justificando a sua escolha "porque é a única expressão que tem ordenada na origem 1". Para cada função elaborou um pequeno texto justificativo.

O Tiago associou cada tipo de representação analítica e de representação gráfica a um tipo de função e, em cada tipo de função, fez a correspondência adequada entre as representações analítica e gráfica. Na Função Afim que passa pela origem, usou dois pontos, determinou um vector diretor, o declive e a equação da recta. Na outra Função Afim, considerou a ordenada na origem e fez a verificação usando dois pontos. Na Função Quadrática, escolheu uma expressão e fez a verificação usando dois pontos. Nas Funções Racionais, escolheu as expressões e fez a verificação usando um ponto.

Na segunda questão (Figura 24) pedia-se ao aluno que associasse cada uma das cinco representações gráficas de função a cada uma das expressões analíticas de função, justificando a razão da escolha. Neste caso, tratava-se apenas de Funções Racionais.

2. Nos referenciais seguintes estão representadas as cinco funções racionais f, g, h, i e j definidas, nos seus domínios, respectivamente, por:

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad g(x)=\frac{1}{x+1}$ $\quad h(x)=\frac{1}{x-2}$ $\quad i(x)=-\frac{1}{x-3}$ $\quad j(x)=\frac{5}{x+1}$



Faça corresponder a cada uma das funções uma das representações gráficas, justificando a razão da escolha.

Figura 24 – Questão 2 de entrevista

Os quatro alunos efetuaram esta tarefa corretamente e é perceptível para o Lourenço, para o Miguel e para a Neusa, pelos dados evidenciados, a forma como o fizeram. O Tiago não teve tempo para indicar a forma como chegou ao resultado. Apenas a Neusa justificou a tarefa através dum texto.

O Lourenço associou corretamente cada representação analítica a cada representação gráfica, usando sempre a verificação com um ponto. Nas funções h e i fez a sua escolha através da assíntota vertical.

O Miguel associou corretamente cada representação analítica a cada representação gráfica. Em todas, usou a assíntota vertical como critério de escolha. Na função j, justificou ainda por uma abertura maior devido ao valor 5 no numerador.

A Neusa associou corretamente cada representação analítica a cada representação gráfica. Em todas, usou a assíntota vertical, associada ao domínio, como critério de escolha. Nas funções g e j, usou também um ponto. Para cada alínea, elaborou um pequeno texto justificativo.

O Tiago associou corretamente cada representação analítica a cada representação gráfica.

Na terceira questão (Figura 25) eram pedidas várias tarefas relativamente a três Funções Racionais.

É importante ter em atenção que as funções se encontravam num formato que, sem recorrer a manipulação/cálculos, certas características e transformações podiam facilmente ser reconhecidas.

3. Considere as funções racionais f , g e h, definidas nos seus domínios, respectivamente, por:

$f(x)=\frac{1}{x}$ $g(x)=2+\frac{4}{x-3}$ $h(x)=1-\frac{3}{x+2}$

8.1. Descreva uma sequência de transformações que permita obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f.

8.2. Descreva uma sequência de transformações que permita obter o gráfico da função h a partir do gráfico da função f.

8.3. Para cada uma das funções g e h:

a) Indique do domínio

b) Indique o contradomínio.

c) Escreva as equações das assíntotas do gráfico.

d) Determine as coordenadas dos pontos em que o gráfico intersecta os eixos coordenados.

e) Calcule a imagem de 1

f) Sem recorrer à calculadora, faça uma representação gráfica, utlizando as informações recolhidas nas alíneas anteriores.

Figura 25 – Questão 3 de entrevista

Em primeiro lugar, pedia-se que o aluno descrevesse uma sequência de transformações que permita obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f .

O Lourenço e o Miguel não realizaram a tarefa.

A Neusa identificou corretamente três transformações sofridas (uma contração/expansão da curva e duas translações) e associou-as à variação dos parâmetros. Nas translações, indicou os vectores respectivos, mas não referiu se a translação é vertical ou horizontal.

O Tiago identificou as três transformações sofridas. Nas translações, indica o sentido em que são efetuadas, mas não os vectores que lhe estão associados. Nomeia ainda as assíntotas. No caso da expansão, refere uma contração.

Em segundo lugar, pedia-se que o aluno descrevesse uma sequência de transformações que permitisse obter o gráfico da função h a partir do gráfico da função f.

O Miguel e o Tiago não realizaram esta tarefa.

O Lourenço identificou a assíntota horizontal da função h, porque a função se encontra num formato que visualmente lhe permite identificar esta assíntota, Depois disse que se adicionam 3 unidades, o que na realidade está incorreto e que se adicionam 2 unidades a x, mas não sabe identificar qual é o efeito que isto tem termos das transformações das funções.

A Neusa identificou corretamente as quatro transformações sofridas (uma expansão da curva, uma simetria e duas translações) e associou-as à variação dos parâmetros. Nas translações, indicou os vectores respectivos, mas não referiu se a translação é vertical ou horizontal.

Em terceiro lugar, pedia-se que o aluno indicasse para cada função g e h, o domínio, o contradomínio, as equações das assíntotas do gráfico, as coordenadas dos pontos em que o gráfico intersecta os eixos coordenados, a imagem de 1 e, por fim, fizesse uma representação gráfica das funções, utilizando as informações recolhidas nas alíneas anteriores, sem recorrer à calculadora.

O Lourenço conseguiu identificar corretamente o domínio, o contradomínio e as assíntotas verticais e horizontais. Calculou a imagem de 1 e, a partir deste cálculo, indicou a intersecção dos gráficos das funções com o eixo dos yy. Não determinou a intersecção com o eixo dos xx. Fez a representação gráfica (Figura 26) à custa de substituição mental de valores, não utilizando os valores anteriormente calculados. Não indicou pontos notáveis nem assíntotas, apesar de se perceber que estas terão sido tomadas em consideração, pela forma que deu às curvas. Apesar da falta de rigor, a função g apresenta alguma semelhança com a realidade. Para a função h, a representação gráfica encontra-se trocada nos "quadrantes", indicação de que parece que continua sem perceber o efeito do sinal menos (como já havia acontecido no trabalho de casa de janeiro).

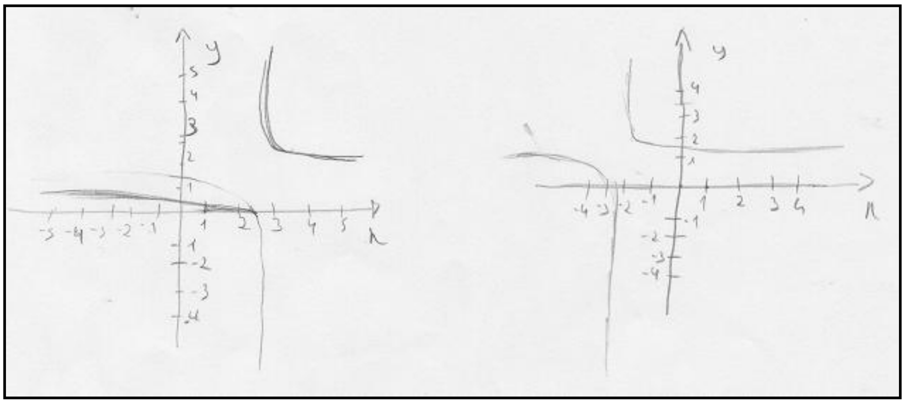


Figura 26 - Representação gráfica de 2 Funções Racionais - Lourenço

O Miguel indicou corretamente o domínio e as assíntotas verticais das funções g e h, o contradomínio e a assíntota horizontal da função g. Na definição do contradomínio da função h, enganou-se no sinal, o que se repercutiu no sinal da assíntota horizontal desta função. Determinou a intersecção dos gráficos das funções no eixo dos xx, usando um quadro de sinal incompleto (Figura 27)

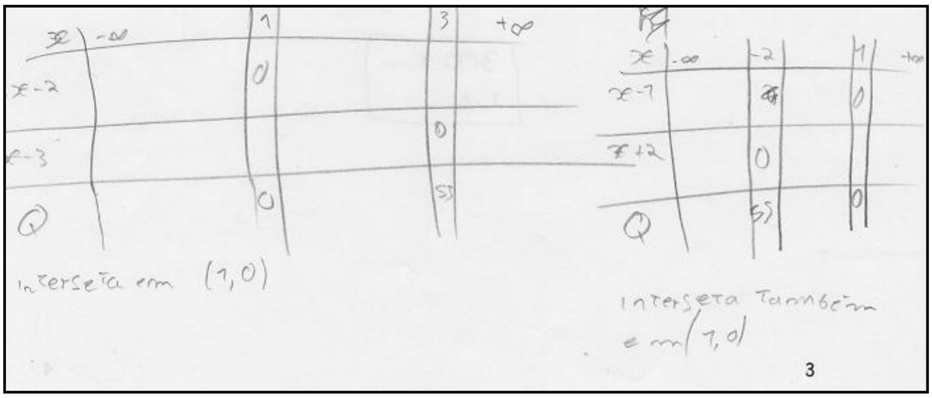


Figura 27 - Quadro de sinal - Miguel

Não determinou a intersecção no eixo dos yy. Não reparou que a imagem de 1 que lhe era pedida numa alínea já tinha sido calculada na alínea anterior. Utiliza os dados calculados, ainda que incompletos, para tentar representar os gráficos das funções (Figura 28). Para a função g, a representação gráfica encontra-se trocada nos "quadrantes". Para a função h, a determinação da assíntota horizontal com sinal trocado tem aqui naturalmente influência. A representação apresenta pouco rigor e não tem a indicação dos pontos notáveis.

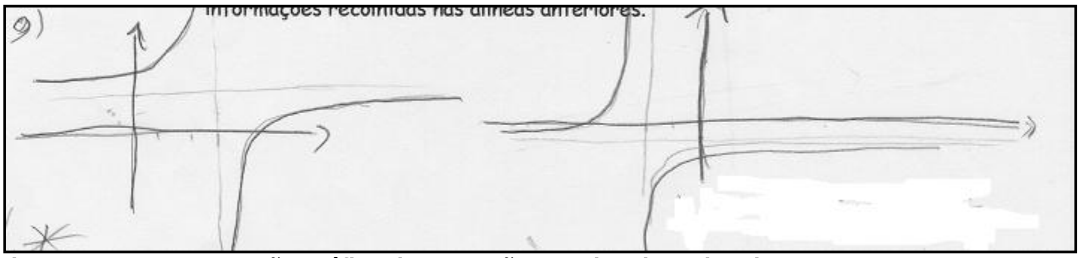


Figura 28 - Representação gráfica de 2 Funções Racionais - Miguel

A Neusa deu todas as respostas que lhe foram pedidas corretamente. Associou as equações das assíntotas com os vectores que definem as translações. Não repara que a imagem de 1 que lhe era pedida numa alínea já tinha sido calculada na alínea anterior. Utilizou corretamente os dados calculados para representar os gráficos (Figura 29) das funções, percebendo que esses dados são os necessários e suficientes e indicou os pontos notáveis.

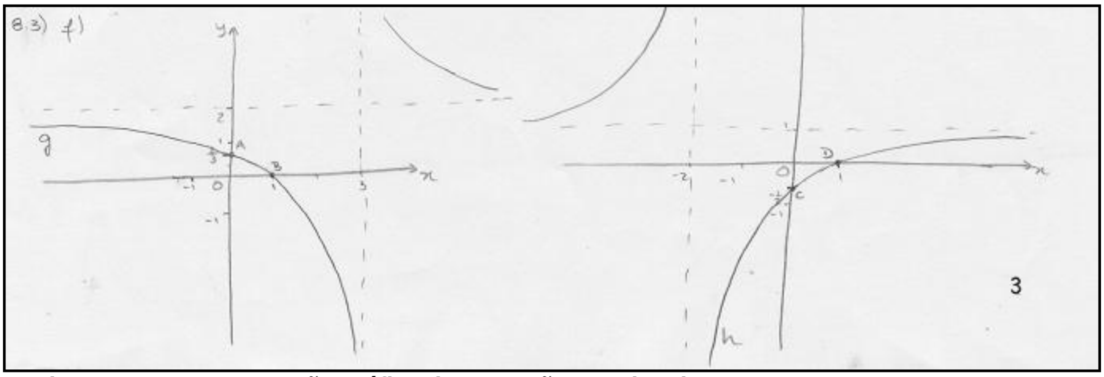


Figura 29 - Representação gráfica de 2 Funções Racionais - Neusa

O Tiago deu todas as respostas que lhe foram pedidas corretamente, à exceção do contradomínio das duas funções que indica como sendo IR, sinal de que continuava com as dúvidas manifestadas no segundo bloco de aulas sobre Funções Racionais. Não reparou que a imagem de 1 que lhe era pedida numa alínea já tinha sido calculada na alínea anterior. Utilizou corretamente os dados calculados para representar os gráficos (Figura 30) das funções, percebendo que esses dados são os necessários e suficientes e indicou os pontos notáveis.

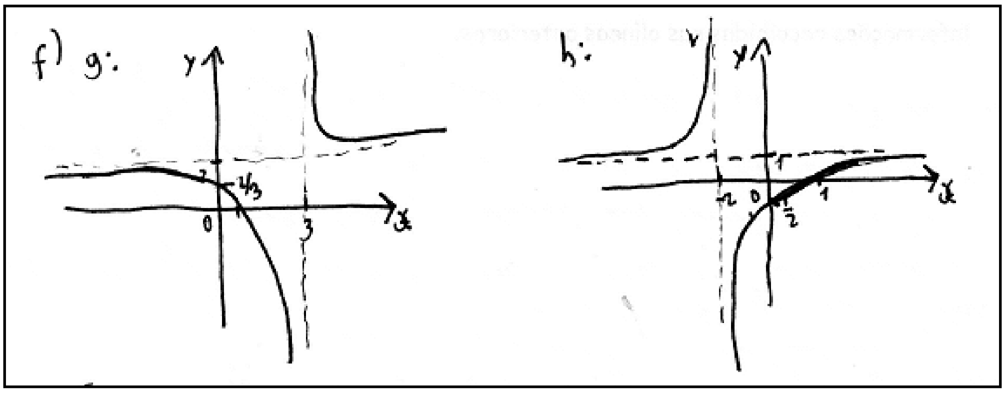


Figura 30 - Representação gráfica de 2 Funções Racionais - Tiago

Na quarta questão, pedia-se ao aluno que representasse gráfica ou analiticamente a seguinte situação real:

Se eu for de Lisboa ao Porto a uma velocidade média de 100 km/h demoro 3 h, se for a uma velocidade média de 120 km/h demoro 2,5 h e se a velocidade média for de 150 km/h demoro 2 h.

O Lourenço representou graficamente (Figura 31), com algum rigor uma hipérbole, a partir dos pontos definidos no enunciado, Colocou em abcissas a velocidade e em ordenadas o tempo, o que é contrário do que é habitual representar, mas decorre da forma como está escrito o enunciado.

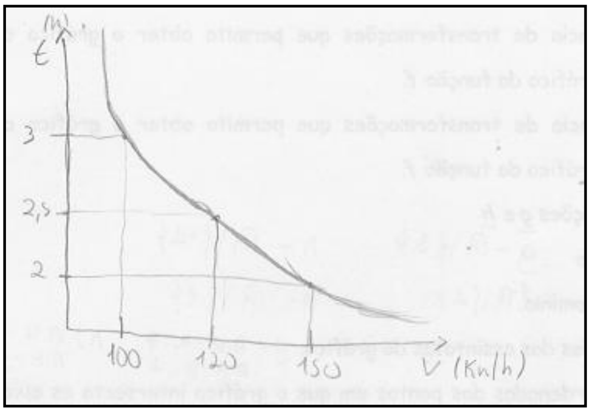


Figura 31 - Representação gráfica de 1 problema – Lourenço

O Miguel representou graficamente (Figura 32) três rectas, a partir dos valores definidos no enunciado, Colocou em abcissas o tempo e em ordenadas a distância e descobriu que para todos a distância era a mesma (300 km). Acabou por misturar velocidades com distâncias (por exemplo, de acordo com o enunciado, quando a velocidade média era de 150 km/h teria demorado 2 h para percorrer a distância, neste caso os 300 km; para essa velocidade, o Miguel indicou no gráfico que a recta passava pelo ponto $(2{,}150)$).

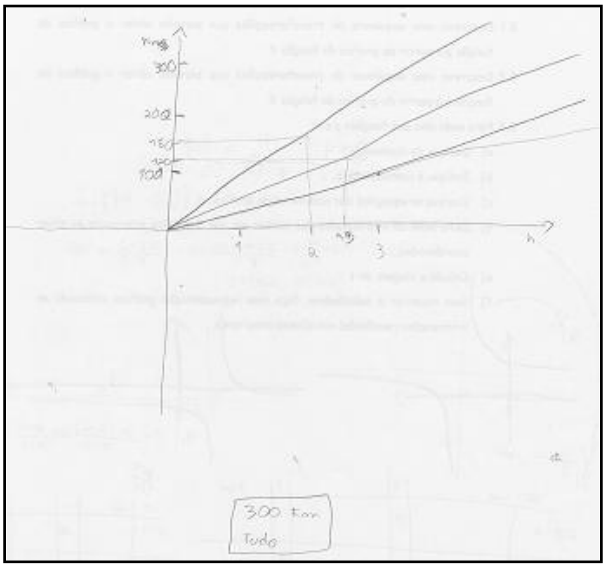


Figura 32 - Representação gráfica de 1 problema – Miguel

A Neusa representou graficamente (Figura 33) com algum rigor uma hipérbole, a partir dos pontos definidos no enunciado. Colocou no eixo das abcissas a velocidade e no eixo das ordenadas o tempo, se bem que não explicitamente indicado, o que é contrário do que é habitual representar, mas decorre da forma como está escrito o enunciado. Não teve tempo para passar para outro tipo de representação.

O Tiago não realizou esta tarefa.

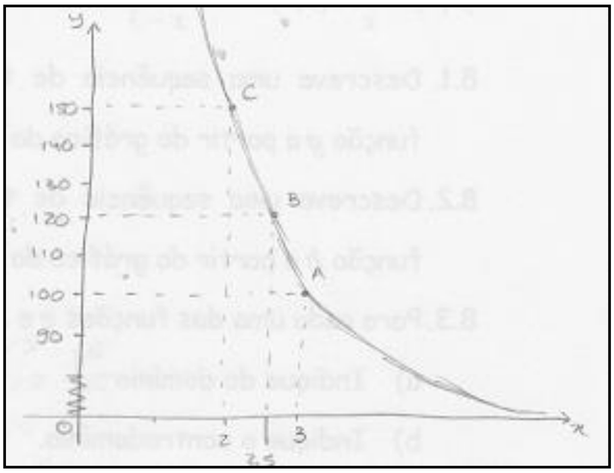


Figura 33 - Representação gráfica de 1 problema – Neusa

Por último, a investigadora solicitou aos alunos que falassem sobre cada uma das seguintes funções polinomiais:

$$f(x) = -2(x-1)(x+3)$$

$$g(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

$$h(x) = -2(x+1)^2 + 8$$

O Lourenço definiu f como uma Função Quadrática com a concavidade virada para baixo porque $-2 < 0$ e disse que precisava de colocar na forma canónica para descobrir os zeros da função, definiu g como uma Função Quadrática com a concavidade virada para baixo porque $-2 < 0$ e disse que podemos obter os zeros com a fórmula resolvente, definiu h como uma Função Quadrática, com a concavidade virada para baixo porque $-2 < 0$ e disse que resolvia o caso notável para obter mais informações sobre a função. Para continuar o estudo das funções, usaria a calculadora.

A primeira coisa que o Miguel fez foi colocar as expressões analíticas que definiam as funções na forma $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Assim, descobriu de imediato que se estava a falar de funções equivalentes. Referiu que f (g e h) era uma Função Quadrática, identificou os zeros e que -2 lhe dava a abertura e orientação da concavidade. Mesmo para função h, não conseguiu identificar as coordenadas do vértice e chegou mesmo a dizer que se tratava de uma progressão aritmética, mas depois retirou essa afirmação. Para continuar o estudo das funções, usaria a calculadora.

A Neusa definiu f como uma Função Quadrática, identificou os zeros e disse que -2 lhe dava a abertura e orientação da concavidade, definiu g como uma Função Quadrática, identificou que -2 lhe dava a abertura e orientação da concavidade e disse que faria um cálculo auxiliar para achar os zeros, definiu h como uma Função Quadrática, identificou que -2 lhe dava a abertura e orientação da concavidade, identificou as coordenadas do vértice. Para continuar o estudo das funções, usaria a calculadora. Olhou um pouco mais e efetuando uns rápidos cálculos mentais, detetou que f, g e h se tratavam de funções equivalentes.

O Tiago definiu f como uma Função Quadrática, com forma de parábola com a concavidade definida por -2 virada para baixo e mais fechada, passando pelo ponto (0,6) e com ordenada na origem -4, definiu g como uma Função Quadrática, com forma de parábola com a concavidade definida por -2 virada para baixo e mais fechada, passando pelo ponto (0,-3) e com ordenada na origem 2, definiu h como uma Função Quadrática, com forma de parábola com a concavidade definida por -2 virada para baixo e mais fechada, passando pelo ponto (0,9) e com ordenada na origem 4. Para continuar o estudo das funções, disse que não usaria a calculadora. Ficou algo incrédulo quando a investigadora lhe disse que as três funções eram equivalentes

Capítulo 5. Conclusões

No presente capítulo, pretende-se dar resposta às questões de investigação formuladas inicialmente, isto é, concluir qual é o conceito que os alunos têm de função, quais as representações que privilegiam para identificar o conceito e que processos utilizam na tradução entre as diferentes representações de funções.

O conceito de função, como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, em que está subjacente a univocidade, é introduzido no Ensino Básico e, nessa altura, trabalhado repetidamente. Porém, os alunos são cada vez menos confrontados com a definição formal à medida que avançam na escolaridade e, quando se pede para evocar um conceito latente, apenas fragmentos soltos são relembrados. Como refere Vinner (1983; citado por Domingos, 1994), o conceito definição inativo acaba muitas vezes por ficar esquecido. Na realidade, a definição ajudou a formar o conceito imagem, mas, no momento em que a imagem foi formada, a definição tornou-se dispensável.

A maioria destes alunos associa a palavra função à definição de correspondência entre duas entidades, objetos e imagens, x e y. Alguns referem que essa correspondência pode ser representada de uma forma analítica, como uma fórmula, uma equação ou uma "conta" com incógnita, uma expressão com variáveis, …, mas há quem também a relacione a um gráfico ou a um diagrama de Venn e quem diga que é algo com aplicação no dia-a-dia. Poucos ou nenhuns dos alunos envolvidos no estudo conseguiram, no entanto, verbalizar uma definição de função coerente e completa e isso é evidente, tanto quando se lhe pede para explicarem o que é uma função numa linguagem matemática como numa linguagem mais comum.

Quando ouvem a palavra função, os alunos associam-na a uma série de imagens, quer seja um tipo de representação ou mesmo classes de funções ou funções específicas. Regra geral, todos os alunos conseguiram indicar vários tipos de funções (afim, quadrática. cúbica, constante, polinomial, definida por ramos, módulo, trigonométrica, racional,..), mas poucos as relacionaram com situações reais e a associação feita limitou-se à sua representação analítica.

Quanto às formas de representação, a maior parte dos alunos referiu-se à gráfica e à analítica, sendo as preferências dependentes do tipo de função e do que lhes é solicitado. Durante o corrente ano letivo verificou-se uma melhor aprendizagem com o recurso à representação gráfica para as funções em estudo. Por outro lado, se a exigência passava por traçar o gráfico da função, o rigor que se pretendia não se coadunava com o que estão dispostos a imprimir na tarefa. A representação pelo diagrama de Venn ainda presente na mente de muitos alunos, aparece apenas associada a uma definição que foi estabelecida no passado e não é mais empregue. A representação tabelar, muito utilizada nos primeiros contactos com funções, deixa de se aplicar no Ensino Secundário, pois a correspondência entre abcissas e ordenadas é feita mentalmente.

Quanto aos mecanismos de tradução entre representações, o papel dos recursos tecnológicos, em especial da calculadora gráfica, que permite um manuseamento individual, veio auxiliar em muito e mudar as formas de trabalho. Antes da existência das calculadoras gráficas, a representação gráfica das funções só era feita após o estudo completo das mesmas. Atualmente, este modo de trabalhar é menos utilizado, pois os alunos podem ir fazendo facilmente o paralelo entre a representação algébrica e a gráfica usando a calculadora. Na tradução entre representações a associação dos parâmetros (constantes) evidenciados nas expressões algébricas com características do gráfico das funções, permite definir uma série de procedimentos no estudo das funções e na transposição entre representações.

Seguindo a teoria da reificação (Sfard, 1991), pode-se verificar que os diversos tipos de funções já exploradas não se encontram todos no mesmo estádio. No caso das Funções Afim e Quadrática, já bastante trabalhadas em anos anteriores, o conceito está regra geral condensado, pois os alunos lidam suficientemente bem com as referidas funções, compreendem o papel dos parâmetros evidenciados nas expressões algébricas, alternam com facilidade entre as representações gráfica e analítica, sendo a tradução efetuada seguindo procedimentos já bem mecanizados. Estes tipos de funções, com que os alunos se sentem mais à vontade, são os mais referidos e os que mais facilmente são associados a situações reais. No entanto para as Funções Quadráticas, tal como num dos estudos de Sfard (1989; citada por Domingos, 1994), ainda há alunos que revelam dificuldades na identificação de funções idênticas com expressões analíticas diferentes. Poucos ou nenhuns terão passado ao estádio de reificação, porque não foi atingida a abstração e não existe um conceito definição compreendido e associado às imagens que os alunos evocam.

No que diz respeito às Funções Trigonométricas, apenas se pode considerar que as mesmas terão sido interiorizadas para a maioria dos alunos. Estes sabem reconhecer a sua existência ao observar uma expressão analítica, pelo facto da mesma incluir os vocábulos sen e $\cos$ ou um gráfico cartesiano, pela forma que a curva apresenta, não sendo, no entanto, evidente qual é sen ou $\cos$. Já o conceito imagem da função tangente aparece associado a uma expressão analítica, a uma relação entre sen e $\cos$, mas dificilmente vem à lembrança o gráfico, pelo facto deste apresentar uma descontinuidade e ser algo ainda "estranho". Por outro lado, os alunos tiveram dificuldade em compreender qual era realmente a variável independente numa função trigonométrica (x ou $senx$). No caso de uma função representada pela expressão analítica, tornava-se relativamente fácil aos alunos transformá-la numa representação gráfica pela definição de alguns pontos, por substituição do valor de x, cálculo do argumento e da função trigonométrica, sabendo que essas funções são periódicas. Já o trajeto inverso tornava-se complicado, sobretudo se o argumento da função representada graficamente não era apenas x. Poucos alunos conseguiram ultrapassar esta dificuldade e poucos souberam aplicar as funções seno e cosseno a situações da vida real e à resolução de equações onde estão envolvidas duas funções, podendo considerar-se que uns apresentam o conceito imagem ainda mais rudimentar do que outros.

No que respeita as Funções Racionais, pode dizer-se que para alguns o conceito estará interiorizado, para outros condensado. Mais uma vez aqui, o modo como se apresenta a expressão algébrica tem especial relevância. Se a Função Racional é representada sob a forma $f(x)=\frac{a}{x},\ x\neq 0$, $f(x)=\frac{a}{x+b},\ x+b\neq 0$ ou $f(x)=c+\frac{a}{x+b},\ x+b\neq 0$ há associação imediata do parâmetro b ao domínio e às assíntotas verticais e do parâmetro c ao contradomínio e às assíntotas horizontais. Muitos vão mais longe e conseguiam representar graficamente a função, mediante o cálculo dos pontos notáveis. Proceder em sentido inverso, isto é, passar da representação gráfica para a representação analítica também se prova tarefa realizável. Porém, se a Função Racional aparece definida por $f(x)=\frac{dx+e}{x+b},\ x+b\neq 0$ já alguns problemas se levantam e não se torna tão evidente indicar a assíntota horizontal. Quanto às representações privilegiadas os alunos alternaram entre a representação algébrica e a gráfica, se bem que esta última fosse bastante mais solicitada nesta fase de introdução às funções racionais para compreensão e definição das suas características. Também a representação algébrica obriga a um tipo de linguagem matemática com que os alunos ainda têm alguma dificuldade em lidar. Os processos que os alunos usam na tradução entre representações dependem das características em questão, como por exemplo, a associação que fazem das constantes da expressão algébrica e as assíntotas. Para alguns subsistem questões relacionadas com os conceitos de domínio, contradomínio, monotonia, continuidade, limites e assíntotas respeitantes a este tipo de funções.

Passando agora a uma síntese relativamente aos quatro alunos da amostra, é importante verificar que, dadas as suas especificidades, para cada um deles as respostas às questões de investigação expressas no início são diferentes.

Para o Lourenço o conceito de função está associado a uma correspondência entre um objeto e uma imagem, função é algo que pode ser representado por um gráfico, mas sobre o qual ele ainda não conseguiu fazer a correspondência entre as diversas imagens que lhe associa. Poderá dizer-se que o conceito de Função Afim está condensado, mas já a Função Quadrática ainda estará no estádio anterior. Para esta, é muito importante o formato da expressão algébrica e apenas o parâmetro indicador do tipo de concavidade é evidente (a em $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$). As dificuldades manifestadas na manipulação de conceitos base têm repercussões na sua aprendizagem e o Lourenço não conseguiu interiorizar o conceito de Função Trigonométrica nem de Função Racional. No caso desta última, conseguiu interiorizar características específicas, como por exemplo, domínio, contradomínio e assíntotas, mas não a função como um todo. O estudo das funções é normalmente incompleto, não justificando as características identificadas e mesmo assim tem de seguir um esquema pré-definido. Quanto às representações das funções, prefere aquela que no momento lhe parece responder diretamente as características solicitadas. De qualquer forma, não manifesta um grande à-vontade na leitura e tradução entre representações, limitando-se à leitura das poucas características que tem interiorizadas.

Para o Miguel, função é um conjunto de pontos definido por uma equação, normalmente com uma incógnita, a que está associada uma representação gráfica e em que é necessário garantir a univocidade.

Face à sua atitude perante os desafios que se lhe colocam é algo complicado compreender em que estádio o Miguel se encontra no que respeita à aprendizagem das funções. Por um lado, parece lidar com alguma facilidade com a maioria das funções já exploradas. Por outro lado, recusa normalmente as sequências de resolução e tradução entre representações habituais e arranja modos alternativos, ultrapassa ou salta certos passos, o que muitas vezes conduz a um resultado que nem sempre é o melhor. Este facto, fruto eventual de alguma imaturidade, associado a uma falta generalizada de trabalho de consolidação de conhecimentos, não lhe permitem ir além do conceito de função condensado para qualquer um dos tipos de função já estudado.

O Miguel, com grande poder de visualização, é talvez o aluno que mais privilegie a representação gráfica e o recurso à calculadora, lidando com esta com relativa facilidade.

A Neusa tem os conteúdos dos anos anteriores bem interiorizados e aplica-os às novas situações sem dificuldade. Através dos diversos desafios com que foi confrontada, quer em sala de aula, quer em conversa, parece constatar-se à primeira vista que tem o conceito de função reificado. Ela compreende as diferentes representações que a função pode assumir, discorre sobre elas, passa facilmente de uma para outra, detalhando os processos envolvidos, diz preferir a representação analítica, mas move-se habilmente em qualquer uma delas; ano a ano, vai incrementando a aprendizagem de novos conteúdos, cuidadosamente associados e comparados com os anteriores. Mas apesar de aplicar todos os procedimentos corretamente na análise das funções, na sua representação e na tradução entre representações, falta-lhe ainda dar o salto para o mundo da abstração e conseguir confrontar o conceito definição com o conceito imagem. Tal facto, ficou patente nos problemas encontrados com a verbalização do conceito de função e com a sua associação a uma situação real.

O Tiago diz que função é algo que caracteriza um objeto pela imagem que lhe corresponde, que é uma relação entre duas coisas, normalmente um x e um y, e que está presente no nosso dia-a-dia. Não se esquece de mencionar que, para uma correspondência ser função, cada objeto não pode ter diferentes imagens.

No processo de aprendizagem das funções, pode dizer-se que o Tiago evoluiu positivamente, trabalhando relativamente bem com as funções e com as representações algébrica e gráfica, se bem que por vezes perde com a falta de rigor e de atenção com a representação gráfica. Aparte o conceito de Função Trigonométrica, que não terá passado da interiorização, todas as outras funções a que nos referimos neste estudo estarão já numa fase de condensação.

Novas noções vão sendo acrescidas e o conceito de função mantém-se em permanente evolução, sendo incrementado, tal qual estrutura (sólida) em construção.

Se bem que uma abordagem puramente operacional é possível, segundo Sfard (1992; citada por Domingos, 1994), para que a aprendizagem cumpra os seus objetivos, é importante passar para a etapa da reificação, em que o conceito de função atinge os contornos da abstração.

Os alunos resguardaram-se considerando apenas o conceito imagem de função, porque lhes parece suficiente e mais natural. No entanto, para passar a um nível superior é essencial que este conceito seja confrontado com o conceito definição, e, como tal, seria importante que fossem confrontados com a definição formal sempre que necessário. De qualquer forma, como refere Vinner (1994), saber de cor um conceito definição não garante a compreensão desse conceito, é preciso ter um conceito imagem e o seu significado tem de ser associado com as palavras. Só que este não é um processo imediato, leva tempo e vai-se fazendo com o recurso a situações reais. O segredo parece estar em passar de uma abordagem mais simples para uma mais abstrata de uma forma consistente.

Em resumo, este estudo sugere que o conceito que os alunos têm de função está intimamente ligado às imagens que eles lhe associam, uma vez que a definição formal introduzida no Ensino Básico foi dispensada. As representações privilegiadas são neste estádio apenas duas, a gráfica e algébrica, e os procedimentos e a facilidade com que os alunos efetuam a tradução entre ambas decorrem da etapa de aprendizagem em que se encontram. O recurso ao conceito definição de função, confrontado com as imagens apercebidas, prevê-se como um passo importante na tentativa de passar para uma etapa de nível superior.

Capítulo 6. Referências Bibliográficas

Bogdan R., Biklen S. (1994). Investigação Qualitativa em Educação, fundamentos, métodos e técnicas. Porto Editora

Domingos, A. (1994). A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações. Tese de Mestrado apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia. Universidade Nova de Lisboa.

Dreyfus, T. (1994). Advanced Mathematical Thinking Processes. Em Tall, D.. Advanced Mathematical Thinking, (pp. 25 a 41) Mathematics Education Research Center. University of Warwick. Kluwer Academic Publishers

Eisenberg, T. (1994). Functions and associated learning difficulties. Em Tall, D. . Advanced Mathematical Thinking, (pp. 140 a 152). Mathematics Education Research Center, University of Warwick, Kluwer Academic Publishers

ME (2001). Programa de Matemática A 10º Ano. *Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Sócio-Económicas*. Lisboa: ME, Departamento do Ensino Secundário.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME

Patton, M.Q. (1990). Qualitative evaluation and research methods (3rd edition). Sage Publications.

Sebastião e Silva, J. (1975). Compêndio de Matemática - 1º Volume, 1º tomo. Lisboa: Edição GEP

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics.

Tuckman, B. (2002). Manual de investigação em educação – Como conceber e realizar o processo de investigação em educação. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian

Vinner, S. (1994) The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Em Tall, D., Advanced Mathematical Thinking (pp. 65 a 81), Mathematics Education Research Center, University of Warwick, Kluwer Academic Publishers

ESFLG - Regulamento interno (2012). Retirado em 2012-06-01 do site http://www.esflg.edu.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=70&Itemid=66

ESFLG - Projeto Educativo 2010-2013 (2012). Retirado em 2012-06-01 do site http://www.esflg.edu.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=70&Itemid=66

ESFLG - Projeto curricular de escola 2010/13 (2012). Retirado em 2012-06-01 do site http://www.esflg.edu.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=70&Itemid=66

ESFLG - Plano anual de atividades 2011/12 (2012). Retirado em 2012-06-01 do site http://www.esflg.edu.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=70&Itemid=66

Aprendizagem social. In Infopedia. Porto: Porto Editora. Retirado em 2012-06-01 do site http://www.infopedia.pt/$aprendizagem-social

Anexos

Anexo 1 - Ficha de trabalho 19A

Escola Secundária Fernando Lopes-Graça

2011 / 2012

Matemática A - 11º Ano

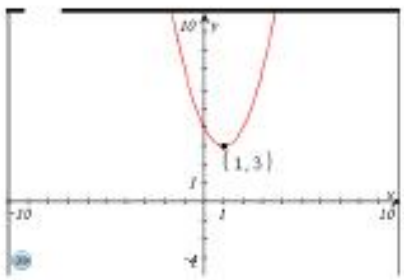
Ficha de Trabalho Nº 19A

1. Observe cuidadosamente as seguintes representações e descreva cada uma delas:

1.1.

$$y = -2x + 3$$

1.2.



Anexo 2 - Ficha de trabalho 20A

Escola Secundária Fernando Lopes-Graça

2011 / 2012

Matemática A - 11º Ano

Ficha de Trabalho Nº 20A

1. Faça o estudo da seguinte função:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

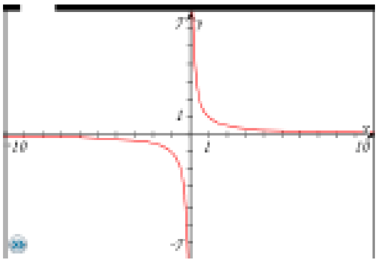
Anexo 3 - Ficha de trabalho 21A

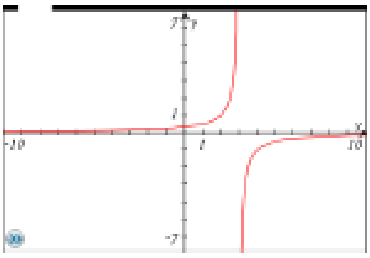
Matemática A - 11º Ano

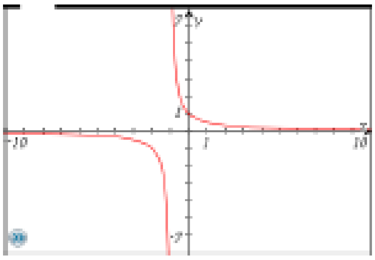
Ficha de Trabalho Nº 21A

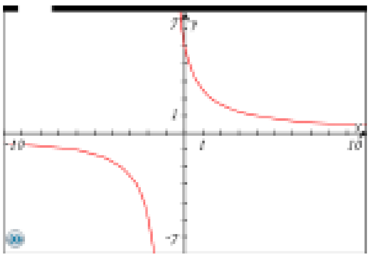
1. Nos referenciais seguintes estão representadas as cinco funções racionais *f*, *g*, *h*, *i* e *j* definidas, respectivamente, por:

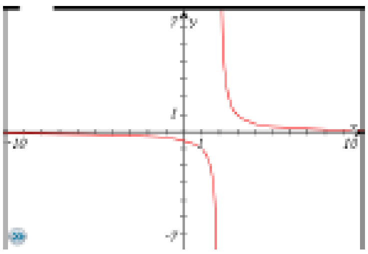
$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad g(x)=\frac{1}{x+1}$ $\quad h(x)=\frac{1}{x-2}$ $\quad i(x)=-\frac{1}{x-3}$ $\quad j(x)=\frac{5}{x+1}$











Faça corresponder a cada uma das funções uma das representações gráficas, justificando a razão da escolha.

Anexo 3 - Ficha de trabalho 21A (continuação)

Complete a tabela:

Função	$f(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=\frac{1}{x+1}$	$h(x)=\frac{1}{x-2}$	$i(x)=-\frac{1}{x-3}$	$j(x)=\frac{5}{x+1}$
Domínio					
Contradomínio					
Injetividade					
Sinal					
Zeros					
Intervalos de monotonia					
Paridade					
Continuidade					
Limites					
Assintotas					

Anexo 4 - Ficha de trabalho 22A

Escola Secundária Fernando Lopes-Graça

2011 / 2012

Matemática A - 11º Ano

Ficha de Trabalho Nº 22A

1. Considere as funções racionais f, g e h, respectivamente, por:

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=2+\frac{4}{x-3} \qquad h(x)=1-\frac{3}{x+2}$$

1.1. Descreva uma sequência de transformações que permitam obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f.

1.2. Descreva uma sequência de transformações que permitam obter o gráfico da função h a partir do gráfico da função f.

1.3. Para cada uma das funções g e h:

a) Indique do domínio

b) Indique o contradomínio.

c) Escreva as equações das assintotas do gráfico.

d) Determine as coordenadas dos pontos em que o gráfico intersecta os eixos das coordenadas.

e) Calcule a imagem de 1

f) Sem recorrer à calculadora gráfica, faça uma representação gráfica, utlizando as informações recolhidas nas alíneas anteriores.

Anexo 5 - Guião das entrevistas

Guião da Entrevista / Conversa

Ter presente que o objectivo desta conversa é obter resposta para as questões:

- Qual é o conceito que os alunos têm de função?
- Quais as representações que privilegiam para identificar o conceito?
- Que processos utilizam na tradução entre as diferentes representações de funções?

Acompanhar as respostas, obtendo o máximo número de dados: em que fase do conceito de função se encontra, qual a representação que privilegia, qual a facilidade com passa de uma representação para outra

1. A palavra função passou a integrar o seu vocabulário matemático a partir do 7º ano. Gostava que me explicasse o que é para si uma função.

2. Se tivesse que explicar a alguém, pelo telefone (sem câmara...) o que é uma função, como o faria?

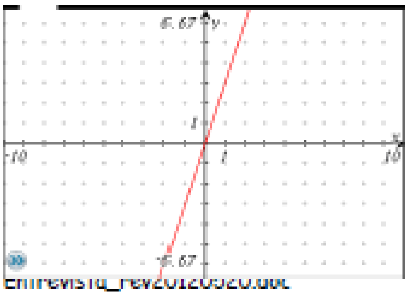
3. Que tipos de funções conhece?
   Pedir exemplos para perceber qual o tipo de representação utilizada.
   Pedir um exemplo de uma situação real associada a cada função referida anteriormente.

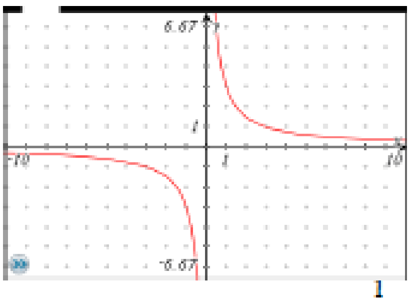
4. Quais as formas que conhece e que mais utiliza para representar uma função?

5. Associe cada representação gráfica de função à expressão analítica que lhe corresponde, justificando a razão da sua escolha:

a) $y = x^2$ b) $y = 2x^2$ c) $y = \frac{3}{x}$ d) $y = -\frac{3}{x}$ e) $y = 2x$ f) $y = -2x$

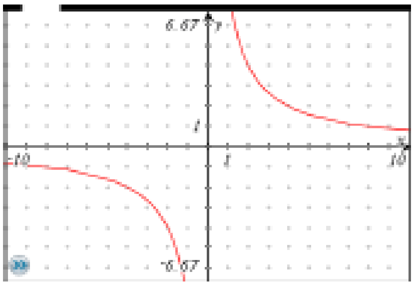
g) $y = 3x$ h) $y = -3x$ i) $y = \frac{4}{x}$ j) $y = \frac{8}{x}$ k) $y = 4x + 1$

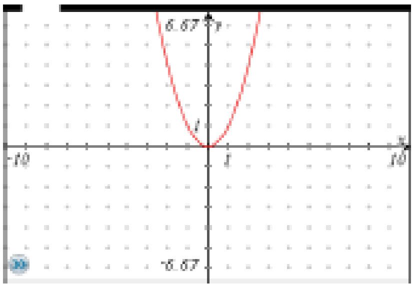


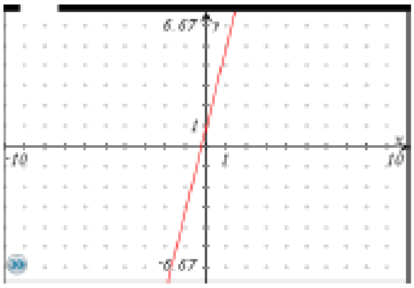


Entrevista_rev20120520.doc 1

Anexo 5 - Guião das entrevistas (continuação)







6. Gostaria que me falasse sobre cada uma das funções seguintes. O que me pode dizer sobre cada uma delas.

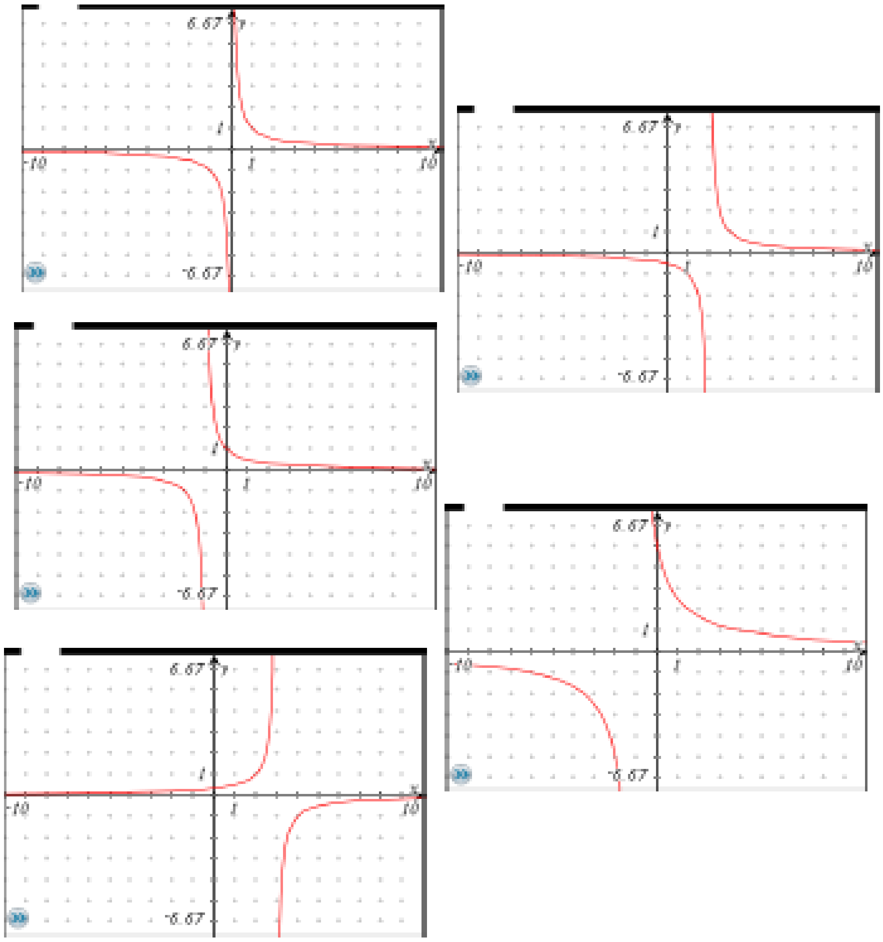
   $f(x) = -2(x-1)(x+3)$
   $g(x) = -2x^2 - 4x + 6$
   $h(x) = -2(x+1)^2 + 8$
   De início, não permitir a utilização da calculadora para obter uma representação gráfica das funções.

7. Nos referenciais seguintes estão representadas as cinco funções racionais *f*, *g*, *h*, *i* e *j* definidas, nos seus domínios, respectivamente, por:

   $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad h(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad i(x) = -\frac{1}{x-3}$ $\quad j(x) = \frac{5}{x+1}$

Entrevista_rev20120520.doc 2

Anexo 5 - Guião das entrevistas (continuação)



Faça corresponder a cada uma das funções uma das representações gráficas, justificando a razão da escolha.

8. Considere as funções racionais f , g e h, definidas nos seus domínios, respectivamente, por:

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=2+\frac{4}{x-3} \qquad h(x)=1-\frac{3}{x+2}$$

Anexo 5 - Guião das entrevistas (continuação)

8.1. Descreva uma sequência de transformações que permita obter o gráfico da função *g* a partir do gráfico da função *f*.

8.2. Descreva uma sequência de transformações que permita obter o gráfico da função *h* a partir do gráfico da função *f*.

8.3. Para cada uma das funções *g* e *h*:

a) Indique do domínio

b) Indique o contradomínio.

c) Escreva as equações das assíntotas do gráfico.

d) Determine as coordenadas dos pontos em que o gráfico intersecta os eixos coordenados.

e) Calcule a imagem de 1

f) Sem recorrer à calculadora, faça uma representação gráfica, utlizando as informações recolhidas nas alíneas anteriores.

Considerar a função h apenas se houver tempo disponível.

9. Represente gráfica ou analiticamente a seguinte situação real:

Se eu for de Lisboa ao Porto a uma velocidade média de 100 km/h demoro 3 h, se for a uma velocidade média de 120 km/k demoro 2.5 h e se a velocidade média for de 150 km/h demoro 2 h.

Tentar depois que o aluno passe para outra representação.